Universite Mohammed V- Agdal
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Module Analyse 2

Filières SM et SMIA

Semestre 2

Hamza BOUJEMAA

Chapitre 1 Intégrale de Riemann.

On peut déterminer la surface de certaines formes géométriques élémentaires comme le carré, le rectangle, le cercle ...Mais on peut imaginer d'autres objets dont les contours sont moins habituels pour lesquels les méthodes élémentaires ne sont plus efficaces. Une des motivations pour introduire l'intégration des fonctions numériques à valeurs réelles est de répondre à cette question. Il faut se rendre compte d'une évidence: On ne peut mesurer que ce qui est mesurable. Pour le mathématicien, il s'agira lors de l'exposé sur l'intégration de bien définir les fonctions qui seront intégrables. Ceci sera fait par étapes. On étudiera d'abord les fonctions en escalier pour lesquelles les formes correspondantes sont des rectangles et par conséquent forcément mesurables. Ensuite, on élargira la classe de fonctions intégrables aux fonctions monotones et aux fonctions continues en les approchant par des fonctions en escalier.

I. Intégrales de fonctions en escalier.

Nous allons tout d'abord donner la définition d'une subdivision associée à un intervalle fermé borné $[a, b]$.

Définition: Une subdivision σ d'un intervalle $I = [a, b]$ est une suite finie strictement croissante $x_0 < ... < x_n$ d'éléments de I telle que $x_0 = a$ et $x_n = b$.

Exemple: On utilisera souvent la subdivision suivante

$$x_0 = a \text{ et pour } \ 1 \leq i \leq n, \ x_i = a + \frac{i}{n}(b - a).$$

Ainsi, à chaque subdivision σ, on a n intervalles fermés bornés associés $[x_i, x_{i+1}]$ pour $0 \leq i \leq n - 1$. On définit alors le pas de la subdivision comme étant

$$h = \sup_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i).$$

Il est facile de constater que, pour l'exemple précédent, le pas est $\frac{b-a}{n}$.

Sur l'ensemble des subdivisions, on introduit une relation d'ordre:

On dit qu'une subdivision σ est plus fine qu'une subdivision σ' si tous les points de σ' appartiennent à σ. En d'autres termes, σ s'obtient de σ' en ajoutant d'autres points de l'intervalle $I = [a, b]$ et en ordonnant la nouvelle famille de points obtenue. De plus, à partir de deux subdivisions σ et σ', on peut définir une nouvelle subdivision $\sigma \cup \sigma'$ qui est

la réunion de σ et de σ' en prenant tous les points apparaissant dans σ ou dans σ' puis en les rangeant dans un ordre strictement croissant.

Nous pouvons à présent donner la définition d'une fonction en escalier:

Définition: Une fonction $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite en escalier s'il existe une subdivision $\sigma : x_0, ..., x_n$ de I telles que la restriction de f à $]x_i, x_{i+1}[$ soit une constante c_i pour $0 \leq i \leq n-1$.

On dit alors que la subdivision σ est associée à f.

Remarques: 1- Il n'y a pas de conditions portant sur les valeurs que prend la fonction f aux différents points x_i pour $0 \leq i \leq n$.
2- Si f est en escalier alors f ne prend qu'un nombre fini de valeurs.
3- Si σ est une subdivision associée à f alors toute subdivision σ' plus fine que σ est également associée à f.

Exemple: La fonction f définie par $f(x) = E[x]$, partie entière de x, est une fonction en escalier sur tout intervalle fermé borné.

Nous sommes à présent en mesure de définir l'intégrale d'une fonction en escalier sur un intervalle $I = [a, b]$.

Définition: L'intégrale d'une fonction en escalier sur $I = [a, b]$ est le réel noté $I(f, \sigma)$ défini par

$$I(f, \sigma) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)c_i.$$

Proposition: $I(f, \sigma)$ ne dépend pas de la subdivision associée σ.

Démonstration: Si σ' est une autre subdivision associée à f, plus fine que σ alors

$$I(f, \sigma) = I(f, \sigma').$$

Il suffit de remarquer que si $]x_i, x_{i+1}[$ est un intervalle associé à la subdivision σ alors il y a une suite d'éléments $x_{i_1} < ... < x_{i_{n_i}}$ de σ' avec $x_{i_1} = x_i$, $x_{i_{n_i}} = x_{i+1}$ et telle que

$$[x_i, x_{i+1}] = [x_{i_1}, x_{i_1+1}] \cup ... \cup [x_{i_{n_i}-1}, x_{i_{n_i}}].$$

Par conséquent, si c_i est la constante associée à σ sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ alors

$$(x_{i+1} - x_i)c_i = \sum_{j=i_1}^{i_{n_i}-1} (x_{j+1} - x_j)c_i.$$

En remarquant que f prend la même valeur c_i sur tous les intervalles $]x_{i_1}, x_{i_1+1}[, ...,]x_{i_{n_i-1}}, x_{i_{n_i}}[$, puis en faisant varier i de 0 jusqu'à $n-1$ et en sommant, on retrouve alors $I(f, \sigma')$.

Ensuite si σ et σ' sont deux subdivisions quelconques de $I = [a, b]$, alors en considérant $\sigma" = \sigma \cup \sigma'$ ($\sigma"$ est à la fois plus fine que σ et σ') et en utilisant ce qui précède, on obtient

$$I(f, \sigma") = I(f, \sigma) \text{ et } I(f, \sigma") = I(f, \sigma') \text{ par suite } I(f, \sigma) = I(f, \sigma').$$

Notation: On écrit alors

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Remarque: L'intégrale d'une fonction en escalier ne dépend pas des valeurs prises par f aux points de la subdivision.

Cas particuliers: 1- Si f est la fonction constante égale à 1 (sauf en un nombre fini de points, alors

$$\int_a^b f(x)dx = b - a.$$

2- Si f est la fonction identiquement nulle sauf en un nombre fini de points, alors

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Propriétés:

1. **Relation de Chasles:** Si c est un élément de $I = [a, b]$, $a < c < b$, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

2. **Linéarité:** Si f et g sont deux fonctions en escalier sur I et si λ et μ sont deux réels, alors la fonction $\lambda f + \mu g$ est en escalier sur I et on a

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Démonstration: Pour la première partie, il suffit de partir d'une subdivision σ associée à f et de considérer la subdivision $\sigma' = \sigma \cup \{c\}$, σ' est plus fine que σ et est aussi associée à f mais cette fois l'élément c fait partie de la nouvelle subdivision.
Pour le deuxième point de la propriété, $\lambda f + \mu g$ est clairement une fonction en escalier, car si σ est associée à f et σ' est associée à g alors $\sigma \cup \sigma'$ est associée à la fonction $\lambda f + \mu g$ et la conclusion découle alors aisément.

Pour clore ce paragraphe, nous allons faire quelques remarques qui nous seront utiles pour la suite.

Remarques:

1. Si f est une fonction en escalier positive alors
$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$
2. Si f et g sont deux fonctions en escalier sur $I = [a, b]$ vérifiant $f \geq g$ alors
$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$
3. Si f est en escalier sur I alors $|f|$ est en escalier sur I et on a
$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$
4. Si f est en escalier sur I et si k est un réel positif vérifiant $|f(x)| \leq k$ sur I alors
$$|\int_a^b f(x)dx| \leq k(b-a).$$

(On remarquera que si σ est associée à f alors la même subdivision σ est associée à $|f|$.)

II. Intégrales de Riemann.

Dans ce qui suit, f désigne une fonction définie sur un intervalle fermé borné $I = [a, b]$ et à valeurs réelles.

Définition: On dit que f est intégrable au sens de Riemann si pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier g et h sur I vérifiant
$$g \leq f \leq h \text{ et } \int_a^b (h-g)(x)dx \leq \epsilon.$$

Il est utile de noter que si f est une fonction intégrable sur I alors f est bornée.

Pour définir l'intégrale d'une fonction intégrable f, on note E_- l'ensemble des fonctions en escalier φ vérifiant $\varphi(x) \leq f(x)\ \forall x \in I$, et E_+ l'ensemble des fonctions en escalier ψ vérifiant $\psi(x) \geq f(x)\ \forall x \in I$.

De même, on note
$$A_- = \{\int_a^b \varphi(x)dx,\ \varphi \in E_-\} \text{ et } A_+ = \{\int_a^b \psi(x)dx,\ \psi \in E_+\}.$$

f étant bornée, les parties A_+ et A_- sont non vides. De plus, tout élément de A_+ est un majorant de A_- et tout élément de A_- est un minorant de A_+.

Posons

$$\alpha = \sup A_-, \quad \text{et } \beta = \inf A_+, \quad \text{alors on a } \alpha = \beta.$$

En effet, l'hypothèse $\alpha < \beta$ signifierait que pour tout couple de fonctions en escalier φ et ψ telles que $\varphi \leq f \leq \psi$, on aurait

$$\int_a^b (\psi - \varphi)(x)dx \geq (\beta - \alpha)$$

et f ne serait pas intégrable.

Inversement, si les deux parties A_- et A_+ sont telles que $\sup A_- = \inf A_+$ alors on peut établir en utilisant la propriété caractéristique de la borne supérieure et celle de la borne inférieure que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists u \in E_-, \quad \text{et } v \in E_+, \ \int_a^b (v - u)(x)dx < \varepsilon.$$

Nous avons obtenu le théorème suivant:

Théorème: Soit $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction bornée, E_-, E_+, A_- et A_+ étant définies comme précédemment, on note $I_-(f) = \sup A_-$ et $I_+(f) = \inf A_+$.

$$f \text{ est intégrable si et seulement si } \ I_-(f) = I_+(f).$$

Nous sommes à présent en mesure de définir l'intégrale d'une fonction intégrable:

Définition:

$$\int_a^b f(x)dx = I_-(f) = I_+(f).$$

Conséquence immédiate: Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable et positive alors

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Proposition: Les fonctions monotones sur $I = [a, b]$ sont intégrables.

Démonstration: Soit ζ une fonction monotone sur I. On suppose par exemple que ζ est décroissante et on choisit la subdivision donnée par $x_0 = a$ et $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ pour $1 \leq i \leq n$. On note M_i la limite à droite de ζ en x_i pour $0 \leq i \leq n-1$ et m_i la limite à gauche de ζ en x_j pour $1 \leq i \leq n$. On considère les deux fonctions en escalier g et h définies par

$$g(x) = m_{i+1} \ \text{ et } h(x) = M_i \text{ pour } x \in]x_i, x_{i+1}[, \ 0 \leq i \leq n-1.$$

On rappelle que les valeurs prises par g et celles prises par h aux points x_i de la subdivision n'ont pas d'importance pour la suite. On a alors $g \leq \zeta \leq h$ et

$$\int_a^b g(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} m_{i+1} \text{ et } \int_a^b h(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} M_i$$

et par suite

$$\int_a^b (h-g)(x)dx \leq \frac{b-a}{n}(M_0 - m_n)$$

Proposition: Les fonctions continues sur un intervalle fermé borné $I = [a, b]$ sont intégrables sur I.

Démonstration: On rappelle que si f est continue sur $[a, b]$ alors f est uniformément continue sur $[a, b]$. En d'autres termes

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \eta > 0 \; |x - x'| < \eta \; \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

On précise que η ne dépend ni de x ni de x'.
Pour la subdivision de $[a, b]$ donnée par $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$, on définit sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour $0 \leq i < n-1$, les deux fonctions en escalier h et g suivantes:

$$g(x) = f(x_i) - \varepsilon \text{ et } h(x) = f(x_i) + \varepsilon.$$

Il est facile de voir que g et h sont deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ qui vérifient à partir d'un certain rang convenable n, $g \leq f \leq h$ et $\int_a^b (h-g)(x)dx = 2\varepsilon(b-a)$. Par suite, f est intégrable.

Sommes de Riemann:

Lors de la démonstration du résultat précédent nous avons obtenu la conséquence suivante:

Proposition: Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, alors la suite $(u_n)_n$ définie par

$$u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(a + i\frac{b-a}{n})}{n}(b-a) \text{ tend vers } \int_a^b f(x)dx.$$

Exemples:

1. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$ tend vers $\int_0^1 x \, dx$.
2. $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}$ tend vers $\int_0^1 x^2 \, dx$.

Remarque: La classe des fonctions continues sera par la suite étendue à une classe plus large formée par les fonctions dites réglées.

A ce stade, il serait utile de donner un exemple d'une fonction non intégrable. La fonction dite "indicatrice des rationnels" qui vaut 1 en tout nombre rationnel et 0 en tout nombre réel non rationnel est non intégrable sur tout intervalle $[a, b]$ avec $a < b$. En effet, il n'est pas possible pour cette fonction de trouver deux fonctions en escalier g et h qui vérifient

$$g \leq f \leq h \text{ avec } \int_a^b (h-g)(x)dx < \varepsilon, \ \forall \varepsilon > 0,$$

car la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ impliquera que forcément on a

$$g(x) \leq 0; \quad \text{et } h(x) \geq 1 \ \forall x \in [a, b]$$

et donc on aura

$$\int_a^b (h-g)(x)dx \geq (b-a).$$

Avant d'étendre les propriétés des intégrales établies pour les fonctions en escalier aux fonctions intégrables, nous allons donner une caractérisation des fonctions intégrables qui facilitera les démonstrations.

Proposition: f est intégrable si et seulement si il existe deux suites de fonctions en escalier (φ_n) et (θ_n) telles que

$$0 \leq (f - \varphi_n) \leq \theta_n \text{ et } \int_a^b \theta_n(x)dx \to 0 \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

Démonstration: Si f est intégrable, alors en prenant $\varepsilon = \frac{1}{n}$, on a deux suites de fonctions en escalier g_n et h_n qui vérifient

$$g_n \leq f \leq h_n \text{ avec } \int_a^b (h_n - g_n)(x)dx < \frac{1}{n},$$

on pose alors $\varphi_n = g_n$ et $\theta_n = h_n - g_n$.

Inversement, pour $\varepsilon > 0$, on choisit N entier tel que $\frac{1}{N} < \varepsilon$, et on considère alors φ_N et θ_N et on pose $g = \varphi_N$ et $h = \theta_N + \varphi_N$. g et h conviennent.

Conséquence:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to +\infty} \int_a^b \varphi_n(x)dx.$$

En effet, il suffit d'écrire

$$0 \leq \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi_n(x)dx \leq \int_a^b \theta_n(x)dx.$$

La propriété de linéarité et la relation de Chasles s'étendent aux fonctions intégrables:

Propriétés: 1. Si f et g sont deux fonctions intégrables, alors

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

2. Si f est une fonction intégrable et si λ st un réel quelconque, alors

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx.$$

Démonstration: On sait qu'il existe deux suites de fonctions en escalier $(\varphi_n)_n$ et $(\theta_n)_n$ telles que

$$0 \leq f - \varphi_n \leq \theta_n \text{ et } \int_a^b \theta_n(x)dx \text{ tend vers } 0,$$

et deux autres suites de fonctions en escalier $(\varphi'_n)_n$ et $(\theta'_n)_n$ telles que

$$0 \leq g - \varphi'_n \leq \theta'_n \text{ et } \int_a^b \theta'_n(x)dx \text{ tend vers } 0.$$

La fonction $f+g$ est clairement intégrable et les deux suites $(\varphi_n+\varphi'_n)_n$ et $(\theta_n+\theta'_n)_n$ sont telles que:

$$0 \leq f+g-(\varphi_n+\varphi'_n) \leq \theta_n+\theta'_n \text{ et } \int_a^b (\theta_n+\theta'_n)(x)dx \text{ tend vers } 0,$$

Maintenant, si λ est un réel donné, on peut supposer que $\lambda > 0$, il est facile de se convaincre que les deux suites $(\lambda\varphi_n)_n$ et $(\lambda\theta_n)_n$ conviennent pour la fonction λf et la propriété 2 découle alors de la même propriété mais cette fois pour les fonctions en escalier.

Relation de Chasles: Si f est une fonction intégrable sur I alors pour tout réel c vérifiant $a < c < b$, on a

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Démonstration: Si $(\varphi_n)_n$ et $(\theta_n)_n$ sont deux suites associées à f, alors chaque élément de ces suites vérifie la relation de Chasles. Puisque $\int_a^c \varphi_n(x)dx$ tend vers $\int_a^c f(x)dx$, $\int_c^b \varphi_n(x)dx$ tend vers $\int_c^b f(x)dx$, $\int_a^b \varphi_n(x)dx$ tend vers $\int_a^b f(x)dx$ et que

$$\int_a^b \varphi_n(x)dx = \int_a^c \varphi_n(x)dx + \int_c^b \varphi_n(x)dx,$$

la même égalité résultera pour les limites.

Autres remarques:

1. Si f et g sont deux fonctions intégrables qui vérifient $f \leq g$ sauf en un nombre fini de points, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.
2. Si f et g sont deux fonctions intégrables qui ne diffèrent qu'en un nombre fini de points alors $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

Disons simplement qu'on écrit la relation de Chasles après avoir suffisamment divisé l'intervalle $[a,b]$ (en chaque point où f et g diffèrent) et de se rendre compte que sur chaque intervalle f et g sont alors égales (ou $f \leq g$ selon le cas) sauf peut être aux extrémités, mais alors les valeurs prises par les fonctions en escalier correspondantes en ces extrémités n'ont pas d'importance quant aux valeurs des intégrales.

Un résultat un peu plus technique est donné par le théorème suivant:

Théorème: Si f est une fonction continue positive vérifiant $\int_a^b f(x)dx = 0$ alors f est la fonction identiquement nulle.

Démonstration: Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) > 0$. f étant continue en x_0, il existe alors un intervalle centré en x_0 de la forme $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset [a,b]$ tel que $f(x) \geq \frac{f(x_0)}{2}$ et par suite

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)dx > \delta f(x_0).$$

Ce qui est absurde.

Remarque: On pourra plus tard établir ce résultat de façon plus simple en utilisant une primitive de f.

En considérant les valeurs absolues, on a le résultat suivant:

Proposition: Si f est intégrable sur $I = [a,b]$, alors $|f|$ est intégrable sur $[a,b]$ et on a

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Démonstration: Notons $(\varphi_n)_n$ et $(\theta_n)_n$ deux suites de fonctions en escalier associées à f, il est alors aisé de vérifier qu'on a

$$||f| - |\varphi_n|| \leq |f - \varphi_n| \leq \theta_n.$$

$|\varphi_n|$ étant aussi une fonction en escalier, ceci prouve que $|f|$ est intégrable. D'autre part, puisque

$$|\int_a^b \varphi_n(x)dx| \leq \int_a^b |\varphi_n(x)|dx$$

alors par passage à la limite, on obtient

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Corollaire: Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a,b]$ alors les deux fonctions $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont également intégrables sur $[a,b]$.

Pour cela il suffit de se rappeler les formules

$$\sup(f(x),g(x)) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)+|(g-f)(x)|) \text{ et } \inf(f(x),g(x)) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)-|(g-f)(x)|).$$

Autre conséquence: S'il existe un réel k positif vérifiant $|f(x)| \leq k \ \forall x \in [a,b]$ alors

$$|\int_a^b f(x)dx| \leq k(b-a).$$

En particulier, on a $|\int_a^b f(x)dx| \leq [\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|](b-a)$.

III. Inégalité de Schwarz, inégalité de Minkowski.

Proposition: Si f et g sont deux fonctions intégrables sur $[a,b]$ alors leur produit fg est aussi intégrable sur $[a,b]$.

Démonstration: A partir de deux suites de fonctions en escalier $(\varphi_n)_n$ et $(\theta_n)_n$ associées à f et de deux autres suites de fonctions en escalier $(\varphi'_n)_n$ et $(\theta'_n)_n$ associées à g et si on note $\alpha = \sup_{x\in I}|g(x)|$ et $\beta = \sup_{x\in I}|\varphi_n(x)|$, on a

$$|(fg-\varphi_n\varphi'_n)(x)| = |(f-\varphi_n)(x)g(x)+\varphi_n(x)(g-\varphi'_n)(x)| \leq \alpha\theta_n(x)+\beta\theta'_n(x).$$

$\alpha\theta_n+\beta\theta'_n$ étant une fonction en escalier qui vérifie les bonnes propriétés. Il est alors aisé de déduire deux suites de fonctions en escalier qui correspondent à la fonction fg. On a donc le résultat.

Inégalité de Schwarz: Si f et g sont deux fonctions intégrables réelles ou complexes on a

$$|\int_a^b (fg)(x)dx|^2 \leq (\int_a^b |f(x)|^2dx)(\int_a^b |g(x)|^2dx).$$

Inégalité de Minkowski: Sous les mêmes hypothèses, on a

$$(\int_a^b |(f+g)(x)|^2dx)^{1/2} \leq (\int_a^b |f(x)|^2dx)^{1/2} + (\int_a^b |g(x)|^2dx)^{1/2}.$$

Démonstration: Remarquons qu'il suffit de le démontrer pour les fonctions positives. Pour tout réel λ, on peut écrire:

$$\int_a^b (f(x)+\lambda g(x))^2dx = \lambda^2\int_a^b (g(x))^2dx + 2\lambda\int_a^b (fg)(x)dx + \int_a^b (f(x))^2dx \geq 0.$$

On reconnait une expression du second degré qui garde un signe constant. Par conséquent, le discriminant doit être négatif ou nul, ce qui conduit à l'inégalité de Schwarz.

La seconde inégalité se déduit de la première:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))^2dx = \int_a^b (f(x))^2dx + \int_a^b (g(x))^2dx + 2\int_a^b (fg)(x)dx$$

$$\leq \int_a^b (f(x))^2dx + \int_a^b (g(x))^2dx + 2(\int_a^b |f(x)|^2dx)^{1/2}(\int_a^b |g(x)|^2dx)^{1/2}$$

$$\leq [(\int_a^b |f(x)|^2dx)^{1/2} + (\int_a^b |g(x)|^2dx)^{1/2}]^2.$$

Remarque: Ces inégalités deviennent des égalités lorsque f (ou g) est nulle ou bien lorsque f et g sont proportionnelles. C'est à dire qu'il existe un réel k pour lequel $g(x) = kf(x)\ \forall x \in I$.

Avant de passer aux primitives et au calcul de certaines d'entre elles, nous allons faire des remarques finales quant aux fonctions intégrables.

En plus des fonctions en escalier, des fonctions monotones et des fonctions continues, il y a une classe plus large de fonctions intégrables constituée par les fonctions dites réglées. Ce sont les fonctions qui peuvent être approchées uniformément par des fonctions en escalier, ou autrement dit, ce sont les fonctions qui sont limite uniforme de fonctions en escalier. Les fonctions continues ont cette propriété.

Mais on se gardera de croire que les fonctions intégrables sont les fonctions réglées. En effet, il s'avère que les fonctions réglées admettent toutes une limite à droite et une limite à gauche en tout point de $I = [a, b]$ et le contre exemple suivant donne une fonction intégrable mais non réglée.

$$f(x) = sin\frac{1}{x} \text{ si } x \in]0, 1], \text{ et } f(0) = 0.$$

On peut alors montrer que f n'admet pas de limite à droite de 0 mais que f est tout de même intégrable sur $[0, 1]$.

IV. Formules de la moyenne:

Nous allons établir deux formules dites de la moyenne. La seconde formule, qui est plus difficile à démontrer, sera utilisée au chapitre suivant pour établir la règle d'Abel.

Première formule de la moyenne: f et g étant deux fonctions intégrables sur $[a,b]$. On suppose de plus que g est positive sur $[a,b]$. Si on note

$$m = \inf_{x\in[a,b]} f(x), \text{ et} M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$$

alors on a

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx.$$

Si de plus f est continue sur $[a,b]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

Démonstration: Pour le premier point, il suffit de partir de la double inégalité

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

et de passer aux intégrales.

Le deuxième point est une conséquence du théorème de la valeur intermédiaire. On considère la fonction F définie par

$$F(x = f(x)\int_a^b g(x)dx.$$

D'après le premier point, $\int_a^b f(x)g(x)dx$ est une valeur intermédiaire pour la fonctin F. On en déduit l'existence d'un élément $c \in [a,b]$ vérifiant les bonnes conclusions.

Deuxième formule de la moyenne:

Soient f et g deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, on suppose que f est positive et décroissante sur $[a,b]$ et on note $f(a+)$ la limite à droite de f en a. Alors il existe un point $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a+)\int_a^c g(x)dx.$$

Remarque: Si f est continue sur $[a,b]$, alors $f(a+) = f(a)$.

Démonstration: On procède en deux étapes. Supposons d'abord la fonction f en escalier, il existe donc une subdivision $x_0 < x_1 < ... < x_n$ de $[a,b]$ et des constantes $c_1, ..., c_n$ telles que

$$f(x) = c_i, \ \forall x \in]x_{i-1}, x_i[, \text{ pour } 1 \leq i \leq n.$$

Notons

$$G(t) = \int_a^t g(x)dx,$$

on va montrer que $\int_a^b f(x)g(x)dx$ est une valeur intermédiaire pour la fonction $H(t) = f(a+)G(t)$.

On a

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{i=1}^{n} c_i[G(x_i) - G(x_{i-1})].$$

L'idée est de factoriser non pas par les c_i mais par les $G(x_i)$. On peut écrire:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i[G(x_i) - G(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n-1} G(x_i)(c_i - c_{i+1}) + c_n G(x_n) - c_1 G(x_0).$$

Si on note m et M respectivement l'inf et le sup de la fonction G sur $[a, b]$, alors

$$mc_1 \leq \sum_{i=1}^{n} c_i[G(x_i) - G(x_{i-1})] \leq Mc_1.$$

c_1 étant bien entendu la limite à droite de f en a. Nous avons donc bien prouvé que $\int_a^b f(x)g(x)dx$ est une valeur intermédiaire de la fonction H. La conclusion découle aisément.

Maintenant, si f n'est pas en escalier, on considère la subdivision usuelle de $[a, b]$, $x_i = a + i\frac{b-a}{n}$ pour $0 \leq i \leq n$ et les deux fonctions en escalier h_n et f_n définies par

$$h_n(x) = f(x_i),\ f_n(x) = f(x_{i+1}) \text{ si } x \in]x_i, x_{i+1}[.$$

Nous allons établir que $\int_a^b h_n(x)g(x)dx$ tend vers $\int_a^b f(x)g(x)dx$, et le fait que $\int_a^b f(x)dx$ soit une valeur intermédiaire résultera de la même propriété pour h_n qui est cette fois-ci en escalier. Plus précisément, on a :

$$f_n \leq f \leq h_n, \text{ et par suite } \int_a^b (f - f_n)(x)dx \leq \int_a^b (h_n - f_n)(x)dx = \frac{b-a}{n}(f(a) - f(b))$$

Si on note k un majorant de $|g|$ sur $[a, b]$, alors

$$|\int_a^b [f(x)g(x) - f_n(x)g(x)]dx| \leq k\int_a^b (f - f_n)(x)dx \leq k\frac{b-a}{n}(f(a) - f(b)).$$

La limite à droite de a pour la fonction f_n étant égale à la limite à droite de a pour la fonction f, par passage à la limite, on aura bien

$$mf(a+) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq Mf(a+).$$

V. Primitive de fonctions intégrables.

Convention: On pose $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ si $b < a$.

Pour toute fonction f intégrable sur $[a, b]$, on considère l'application F définie par

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx.$$

Clairement, on a $F(v) - F(u) = \int_u^v f(x)dx$ et F vérifie les propriétés suivantes:

Propriétés: 1. Si f est intégrable alors F est continue car lipschitzienne de rapport

$$k = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|.$$

De plus, F admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en tout point où f admet une limite.

Démonstration: La première partie ne pose pas de problème. Pour le deuxième volet, on note l la limite à droite (par exemple) en u de f, on a alors:

$$|\frac{F(u+h) - F(u)}{h} - l| = |\frac{\int_u^{u+h}(f(x) - l)dx}{h}| \leq \varepsilon,$$

si h est suffisamment petit. Ce qui montre que F est dérivable à droite de u et de nombre dérivé à droite l. Le cas à gauche se traite de la même manière.

Corollaire: Si f est continue sur $[a, b]$ alors F est dérivable en tout point de $[a, b]$ et pour tout $x \in [a, b]$, on a

$$F'(x) = f(x).$$

Définition: On appelle primitive de f sur $[a, b]$ toute fonction F définie sur $[a, b]$ et vérifiant $F'(x) = f(x)\ \forall x \in [a, b]$.

Nous sommes en mesure d'énoncer le théorème suivant:

Théorème: Si f est continue alors F définie par $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ est une primitive de f sur $[a, b]$ et si G est une autre primitive de f on a

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Démonstration: Si G est une autre primitive de f, on a $F'(x) = G'(x)$ et donc $F(x) - G(x) = c$ constante. Par suite, $F(b) - G(b) = F(a) - G(a)$.

Remarque: Si f admet une dérivée f' continue on a

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$$

et s'il existe une constante $k \geq 0$ vérifiant $|f'(x)| \leq k \ \forall x \in [a,b]$ alors

$$|f(b) - f(a)| \leq k|b-a|.$$

Notations: Toute primitive G de f est notée

$$G(x) = \int f(x)dx, \text{ et on écrit aussi } [G(x)]_a^b = G(b) - G(a).$$

Exemples:

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + c, \ \int \frac{dx}{x-a} = ln|x-a| + c.$$

$$\text{Pour } n \neq -1, \ \int (x-a)^n dx = \frac{1}{n+1}(x-a)^{n+1} + c.$$

$$\int \frac{dx}{x^2+m^2} = \frac{1}{m}arctan\frac{x}{m} + c.$$

VI. Changement de variable et intégration par parties.

1. Changement de variable dans l'intégrale.

Proposition: Soit φ une application définie sur un intervalle $I = [a,b]$ de classe $\mathcal{C}^1$ alors $\varphi(I)$ est un intervalle fermé borné et pour toute fonction f définie et continue sur $\varphi(I)$ on a

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f \circ \varphi(x)\varphi'(x)dx.$$

Démonstration: Soit F la fonction définie par

$$t \longmapsto \int_{\varphi(a)}^{\varphi(t)} f(x)dx$$

et G celle définie par

$$G(t) = \int_a^t f \circ \varphi(x)\varphi'(x)dx,$$

on a $F'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ et $G'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$, par suite F et G ont même dérivée. De plus, on a $F(a) = G(a)$ et donc $F(x) = G(x)$ pour tout $x \in [a,b]$, en particulier pour $x = b$.

Applications:

$$\int \frac{dt}{tln(t)} = ln(|lnt|) + c$$

peut s'obtenir en considérant la fonction φ définie par $\varphi(t) = ln(t)$.

$$\int \frac{dt}{ch(t)} = \int \frac{2dt}{e^t + e^{-t}}$$

peut s'obtenir en posant $\varphi(t) = e^t$.

On peut montrer grâce au changement de variable $\varphi(t) = 1/t$ que

$$\forall a > 0,\ \int_a^{1/a} \frac{ln\ t}{1+t^2} dt = 0.$$

$$\int \frac{f'(t)}{1+f^2(t)} dt = Arc\ tan(f(t)) + c$$

s'obtient en posant $\varphi(t) = f(t)$.

Grâce à la formule de changement de variable, on peut établir que si f est une fonction paire, respectivement impaire, définie sur un intervalle de la forme $[-a, a]$ alors

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx, \text{ respectivement } \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

2. Formule d'intégration par parties.

Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I = [a, b]$ il est facile d'établir la formule

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Exemples: Pour avoir

$$\int lnx\ dx,$$

on pose $f(x) = x$ et $g(x) = lnx$; on a donc $f'(x) = 1$ et $g'(x) = \frac{1}{x}$
ainsi

$$\int lnxdx = xlnx - \int dx = xlnx - x + c.$$

$$\int (sinx)e^x\ dx$$

s'obtient en effectuant deux intégrations par parties successives.

VII. Quelques méthodes de recherche de primitives.

1. Intégration des fractions rationnelles:

Nous allons donner à présent une méthode générale pour trouver une primitive d'une fraction rationnelle donnée.

Soit donc R une fraction rationnelle, on note

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

P et Q étant deux polynômes de degrés respectifs n et m. On sait que $Q(x)$ peut être factorisé de la manière suivante (selon le nombre de racines réelles et de racines complexes)

$$Q(x) = \pi_{i=1}^{p}(x - a_i)^{k_i}\pi_{j=1}^{q}(x^2 + b_j x + c_j)^{l_j}.$$

Le théorème de décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples permet d'écrire R sous la forme

$$R(x) = E(x) + \sum_{i=1}^{p}(\sum_{k=1}^{k_i}\frac{\alpha_k}{(x-a_i)^k}) + \sum_{j=1}^{q}(\sum_{l=1}^{l_j}\frac{\beta_l x_l + \gamma_l}{(x^2 + b_j x + c_j)^l}).$$

où E est un polynôme de degré $n - m$ (avec la convention que le polynôme est nul si son degré est négatif.)

Nous voyons donc qu'il suffit d'être capable de déterminer des primitives pour les fractions rationnelles de la forme

$$\int \frac{dx}{(x-a)^r}, \text{ et } \int \frac{\beta x + \gamma}{(x^2 + bx + c)^s}dx,$$

où r et s sont des entiers naturels.

Le premier type d'intégrale ne pose aucun problème. Pour le second, nous allons d'abord détailler la méthode dans le cas $s = 1$ puis nous le ferons dans le cas général. On écrit $x^2 + bx + c$ sous sa forme canonique $x^2 + bx + c = (x + \frac{b}{2})^2 + c - \frac{b^2}{4}$ puis on fait le changement de variable $X = x + \frac{b}{2}$. Selon les hypothèses, $c - b^2 4$ est strictement positif, on peut en introduisant une nouvelle variable Y ramener la fraction initiale à la forme

$$\frac{AY + B}{Y^2 + 1}.$$

Pour cette dernière, on la sépare en deux expressions

$$\frac{AY}{Y^2 + 1}, \frac{B}{Y^2 + 1}.$$

La première admet une primitive de la forme $(A/2)ln(Y^2 + 1)$. Quant à la seconde, on a besoin de la fonction arctangente.

Lorsque $s > 1$, on fait le même travail qui nous conduit ici aussi aux deux formes suivantes

$$\frac{AY}{(Y^2+1)^s}, \ \frac{B}{(Y^2+1)^s}.$$

La première ne pose pas de problème particulier alors que pour la seconde, nous avons besoin d'établir grâce à la formule d'intégration par partie une relation de récurrence entre

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2+1)^n}, \text{ et } I_{n+1} = \int \frac{dx}{(x^2+1)^{n+1}}.$$

Il est facile d'obtenir la relation suivante pour $n \geq 1$

$$I_{n+1} = \frac{1+2n}{2n} I_n - \frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2+1)^n}, \text{ avec } I_1 = arctan\ x.$$

Nous allons étudier quelques exemples d'application.

Exemple 1. Pour déterminer

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)},$$

on décompose d'abord en éléments simples. Pour cela, on écrit

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+x+1}.$$

Il y a plusieurs façons de déterminer, dans chaque cas, les constantes. Bien évidemment la méthode de l'identification convient mais il est utile de chercher directement les constantes soit en remplaçant x par une valeur bien choisie soit en multipliant les deux membres de l'égalité précédente par une certaine expression (souvent le dénominateur correspondant) avant de donner à une x une valeur adéquate. Par exemple, dans ce cas, pour trouver a, on multiplie les deux membres par $x+1$ puis on donne à x la valeur 1. Ensuite, pour trouver b, on peut multiplier les deux membres par x et on fait tendre x vers $+\infty$ et enfin pour c, on peut donner à x la valeur 0. On trouve alors

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{-x}{x^2+x+1}.$$

On déduit

$$\int \frac{1}{x+1} dx = ln|x+1| + K$$

$$\text{et } \int \frac{-x}{x^2+x+1} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx + \frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1+[\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})]^2} dx.$$

Finalement, on obtient

$$\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)} = ln|x+1| - \frac{1}{2} ln(x^2+x+1) + \frac{\sqrt{3}}{3} arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})) + K.$$

Pour trouver b et c, on peut aussi donner à x une valeur complexe solution de $x^2+x+1=0$ après avoir multiplié les deux membres par x^2+x+1. Ceci est légitime car la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples est valable sur $\mathbb{C}$.

Exemple 2.

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$$

On décompose en éléments simples

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{cx+d}{x^2+1} + \frac{ex+f}{(x^2+1)^2}.$$

Pour obtenir b, on multiplie les deux memnbres par $(x+1)^2$ puis on donne à x la valeur 1. Ceci conduit à $b = 1/4$. Ensuite, pour avoir e et f et compte tenu du fait que la décomposition dans $\mathbb{R}$ résulte de la décomposition dans $\mathbb{C}$, on multiplie par $(x^2+1)^2$ et on remplace x par i. L'identification des parties réelle et imaginaire conduit à $e = -1/2$ et $f = 0$. On obtient la relation $a + c = 0$ en multipliant par x et enfaisant tendre x vers $+\infty$. Enfin en donnant à x les valeurs 0 puis 1, on a deux égalités additionnelles $a+b+d+f = 1$ et $8a+4b+8c+8d+4e+4f = 1$. On déduit de tout ce qui précède

$$a = 1/2,\ b = 1/4,\ c = -1/2,\ d = 1/4,\ e = -1/2 \text{ et } f = 0.$$

et par conséquent,

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{1/2}{x+1} + \frac{1/4}{(x+1)^2} + \frac{(-1/2)x+1/4}{x^2+1} + \frac{-(1/2)x}{(x^2+1)^2}.$$

D'où enfin,

$$\int \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}ln|x+1| - \frac{1}{4}(x+1)^{-1} - \frac{1}{4}ln(x^2+1) + \frac{1}{4}arctan\ x + \frac{1}{4}(x^2+1)^{-1} + K.$$

2. Fractions rationnelles trigonométriques:

Il s'agit des primitives de la forme

$$\int R(sin\ \theta,\ co\ \theta)d\theta,$$

où R est une fraction rationnelle à deux variables. Dans ce cas, le changement de variable $t = tan(\theta/2)$ permet de ramener la recherche d'une primitive d'une fraction rationnelle trigonométrique à une primitive d'une fraction rationnelle à laquelle s'appliquera la méthode ci-dessus. Notons que si $t = tan(\theta/2)$, alors on a les relations suivantes

$$cos(\theta) = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ sin(\theta) = \frac{2t}{1+t^2},\ \text{et } dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Exemple: Pour calculer

$$\int \frac{d\theta}{1+3cos(\theta)},$$

on pose donc $t = tan(\theta/2)$, et on obtient

$$\int \frac{dt}{2-t^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}[\int \frac{dt}{\sqrt{2}-t} + \int \frac{dt}{\sqrt{2}+t}].$$

Après intégration , on a

$$\int \frac{d\theta}{1+3cos(\theta)} = \frac{1}{2\sqrt{2}} ln|\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}| + K.$$

Il y a certains cas particuliers de fractions rationnellles trigonométriques pour lesquelles des changements de variable adaptés permettent l'obtention de primitives plus rapidement. Par exemple, lorsque R est une fonction impaire, le changement de variables $t = cos(\theta)$ est bien adapté.

3. Autres types de primitive.

Pour la forme

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx,$$

on transforme l'expression ax^2+bx+c sous la forme $\alpha(X^2+A^2)$, $\alpha(X^2-A^2)$ ou $\alpha(A^2-X^2)$ (avec $\alpha > 0$) selon le signe de b^2-4ac. On utilise alors pour changement de variable la fonction sh, ch, sin ou cos selon le cas. Bien évidemment, les relations $sin^2x + cos^2x = 1$, $ch^2x - sh^2x = 1$ permettront de se débarasser de la racine carrée et de ramener la question à la recherche de primitive d'une fraction rationnelle.

Exemples: Pour calculer

$$\int \sqrt{1-x^2}dx,$$

on pose $x = cos(t)$ qui conduit à (en supposant $sin(t)$ positif)

$$-\int [sin(t)]^2 dt = \frac{sin(2t)}{4} - \frac{t}{2} + K = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2} Arc\, cos(x) + K.$$

Pour calculer

$$\int \sqrt{1+x^2}dx,$$

on pose $x = sh(t)$ qui conduit à

$$\int [ch(t)]^2 dt = \int \frac{ch(2t)+1}{2} dt = \frac{sh(2t)}{4} + \frac{t}{2} + K = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2} Arg\, sh(x) + K.$$

Chapitre 2 # Intégrales généralisées.

I. Introduction.

Nous savons que $\forall a > 0, \quad \int_1^a \frac{1}{x} dx = ln\ a$

et par suite

$$\lim_{a \to +\infty} \int_1^a \frac{1}{x} dx = +\infty.$$

Nous savons également que $\forall a > 0 \quad \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{a} + 1,$

et par suite

$$\lim_{a \to +\infty} \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = 1.$$

Nous écrirons $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = +\infty,$ et nous dirons que l'intégrale diverge.

De même, nous écrirons $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1,$ et nous dirons que l'intégrale converge.

Considérons le problème de convergence suivant:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Nous voyons, que dans ce cas, on a une étude à faire au voisinage de 1 et une étude à faire au voisinage de -1. Pour cela, on étudiera séparément les deux intégrales

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt \text{ et } \int_{-a}^0 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt, \text{ pour } 0 \leq a < 1,$$

et on fera tendre a vers 1. Il s'avère que

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = [Arc\ sin\ t]_0^a$$

et par suite, comme $Arc\ sin\ a$ tend vers $\frac{\pi}{2}$, on voit que cette première intégrale est convergente. De même, on a des conclusions analogues pour la deuxième intégrale. On conclut alors que l'intégrale initiale est convergente et on écrit

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \pi.$$

II. Définitions et exemples

Définitions: Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, b[$ avec $b \leq +\infty$. On dit que f est localement intégrable sur $[a, b[$ si f est intégrable sur tout intervalle fermé borné contenu dans $[a, b[$.

Soit f une fonction définie et localement intégrable sur un intervalle de la forme $[a, b[$ avec $b \leq +\infty$. On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente si la fonction F définie sur $[a, b[$ par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

tend vers une limite l finie lorsque x tend vers b. Cette limite est l'intégrale généralisée de f sur $[a, b[$. On écrit

$$\int_a^b f(t)dt = l.$$

Exemples:

$$\text{Comme } \int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x}, \text{ et } \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0,$$

l'intégrale est convergente et on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1.$$

$$\text{Par contre, } \int_0^1 \frac{1}{1-x}dx \text{ diverge.}$$

En effet,

$$\forall a,\ 0 \leq a < 1,\ \int_0^a \frac{1}{1-x}dx = [-\ln(1-x)]_0^a,$$

et la divergence résulte du fait que

$$\lim_{a\to 1} ln(1-a) = -\infty.$$

Définition. Soit f une fonction définie et localement intégrable sur un intervalle de la forme $]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ et c un élément quelconque de $]a, b[$. On dit que l'intégrale de f sur $]a, b[$ est convergente si chacune des intégrales

$$\int_c^b f(t)dt, \text{ et } \int_a^c f(t)dt \text{ est convergente.}$$

On notera que la définition est indépendante du choix de c.

Mises en garde: 1. Il se peut que $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(t)dt$, pour $\alpha > 0$, tende vers une limite finie lorsque $\alpha \to +\infty$ sans que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ soit convergente. En effet, il suffit de considérer une fonction impaire continue. Par exemple, $\int_{-\infty}^{+\infty} x\ dx$ diverge alors que

$$\int_{-a}^{+a} x\ dx = 0,\ \forall a > 0.$$

2. Si f est une fonction définie, localement intégrable et bornée sur $]a, b[$, on peut affirmer directement que $\int_a^b f(t)dt$ est convergente. En effet, on peut prolonger f en a et en b par n'importe quelles valeurs, l'existence de l'intégrale sera assurée car, en fait, la fonction est intégrable sur $[a, b]$. Comme exemple, on pourra étudier la fonction

$$x \longmapsto sin(\frac{1}{x}),\ \text{pour } x \in]0, 1].$$

Calcul pratique: Lorsque f est continue sur $]a, b[$, si F est une primitive de f,

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt,\ \ \text{pour } a < c < b,$$

alors l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente si et seulement si F admet une limite finie à droite en a et une limite finie à gauche en b et on a

$$F(b-) - F(a+) = \int_a^b f(t)dt.$$

Remarque: La formule de changement de variable permet de ramener dans certains cas l'étude de la convergence sur un intervalle non borné à un intervalle borné.

La formule d'intégration par parties peut être aussi d'une grande utilité pour étudier la convergence de certaines intégrales.

Exemple 1:

$$\int_0^1 lnx\ dx\ \ \text{est convergente.}$$

Grâce à une intégration par parties et en se plaçant d'abord sur un intervalle de la forme $[a, 1]$ avec $0 < a < 1$, on a

$$\int_a^1 lnx\ dx = [x\ ln(x)]_a^1 - \int_a^1 1\ dx = [x\ ln(x)\ - x]_a^1.$$

On voit bien que lorsque a tend vers 0, l'intégrale tend vers une limite finie. Par conséquent, l'intégrale converge.

Exemple 2:

$$\text{Pour tout } n \geq 0,\ I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt\ \ \text{est convergente et vaut } n!.$$

En effet, on se place d'abord sur un intervalle de la forme $[0, a]$ avec $a > 0$ sur lequel on peut établir, grâce à une intégration par parties, une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} qui est $I_{n+1} = (n+1)I_n$ avec $I_0 = 1$. La convergence de I_n entraine celle de I_{n+1}.

III. Critères généraux de convergence:

Soit f une fonction localement intégrable sur $]a, b[$ et c un élément quelconque de $]a, b[$, on note $F(x) = \int_c^x f(t)dt$. On rappelle que la convergence de $\int_a^b f(t)dt$ équivaut à l'existence de la limite à droite $F(a+)$ et de la limite à gauche $F(a-)$. Nous allons d'abord établir des résultats valables pour les fonctions positives.

1. Cas d'une fonction positive localement intégrable:

On se place sur un intervalle de la forme $[a, b[$, le cas d'un intervalle de le forme $]a, b]$ se ramène au cas précédent avec un changement de variable convenable.

Soit f une fonction localement intégrable et positive sur $[a, b[$, on note $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. On rappelle que la convergence de $\int_a^b f(t)dt$ équivaut à l'existence de la limite à gauche $F(b-)$.

Proposition: Si F est majorée alors l'intégrale est convergente. Sinon, on a

$$\int_a^b f(t)dt = +\infty.$$

Critères de comparaison:

Soient f et g sont deux fonctions positives, localement intégrables sur $[a, b[$ vérifiant

$$f(t) \leq g(t),\ \forall t \in [a, b[,\ \text{alors}$$

- Si $\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\int_a^b f(t)dt$ converge.

- Si $\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Remarque: Il suffit de supposer $f(t) \leq g(t)$ au voisinage de b.

Exemple 1: $f(t) = e^{-t^2}$ et $g(t) = e^{-t}$ vérifient $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in [0, x]$ avec $x > 0$ quelconque. La proposition précédente assure la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

Exemple 2:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sint}dt \ \text{ est divergente.}$$

Pour cela, on a

$$0 < sin\ t < t\ \forall t \in]0, \frac{\pi}{2}]$$

et par suite sur le même intervalle

$$\frac{1}{t} \leq \frac{1}{sint}.$$

Comme $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t} dt$ diverge, par conséquent $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{sint} dt$ diverge aussi.

2. Cas d'une fonction localement intégrable quelconque:

Dans ce qui suit, f désigne une fonction définie localement intégrable sur l'intervalle considéré, non nécessairement positive.

Proposition: $I = [a, b[$ et l'intégrale considérée est notée $\int_a^b f(t)dt$.
$\int_a^b f(t)dt$ converge si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ convergente vers b, la suite $(F(x_n))_n$ définie par $F(x_n) = \int_a^{x_n} f(t)dt$ est convergente.

Démonstration: Si l'intégrale est convergente, alors pour toute suite $(x_n)_n$ convergente vers b, la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = \int_a^{x_n} f(t)dt$ tend vers $\int_a^b f(t)dt$. Inversement, si $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont deux suites convergentes vers b, les suites $(F(x_n))_n$ et $(F(y_n))_n$ sont nécessairement convergentes vers la même limite.(Sinon on pourrait construire à partir de $(x_n)_n$ et de $(y_n)_n$ une autre suite $(z_n)_n$ convergente aussi vers b mais pour laquelle $(F(z_n))_n$ serait divergente.)

Critère de Cauchy: Soit f une fonction localement intégrable sur $[a, b[$.

$$\int_a^b f(t)dt \text{ est convergente si et seulement si}$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall u, v\ ;\ u, v \in]b - \delta, b[\ ;\ |\int_u^v f(t)dt| < \varepsilon.$$

Si $b = +\infty$, alors on remlacera $u, v \in]b - \delta, b[$ par $u, v > \delta$.

Démonstration: Pour la première implication, on écrit

$$\int_u^v f(t)dt = \int_a^v f(t)dt - \int_a^b f(t)dt - \int_a^u f(t)dt + \int_a^b f(t)dt.$$

En passant aux valeurs absolues et en majorant, on obtient:

$$|\int_u^v f(t)dt| < |\int_a^v f(t)dt - \int_a^b f(t)dt| + |\int_a^u f(t)dt - \int_a^b f(t)dt| < 2\epsilon.$$

Inversement, si l'intégrale de f vérifie le critère de Cauchy, cela signifie que pour toute suite $(x_n)_n$ convergeant vers b, la suite $(F(x_n))_n$ est de Cauchy donc convergente vers une limite. De plus, cette limite ne dépend pas de la suite de $(x_n)_n$ choisie. Ainsi, F admet bien une limite finie en b ce qui implique la convergence de l'intégrale.

3. Convergence absolue et semi convergence:

Définition: Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle ouvert ou semi ouvert I d'extrémités a et b, on dit que l'intégrale de f sur I est absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|dt$ converge.

Le critère de comparaison pour les fonctions positives permet de déduire le théorème suivant:

Théorème: S'il existe une fonction φ telle que

$$|f(t)| \leq \varphi(t)\ \forall t \in I \ \text{ et } \int_a^b \varphi(t)dt \ \text{ convergente, alors}$$

$\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente.

Exemples: 1. $\int_0^1 ln\ t\ sin\ t\ dt$ est absolument convergente. En effet,

$$\int_0^1 |lnt\ sint|\ dt \leq \int_0^1 |lnt|dt,$$

et $\int_0^1 |lnt|dt = -\int_0^1 lntdt$ qui converge d'après un exemple déjà traité.

2. Etude de la convergence de

$$\int_1^{+\infty} \frac{sinx}{x}dx.$$

On se place donc sur un intervalle de la forme $[1, a]$, avec $a > 1$, et on fait une intégration par parties:

$$\int_1^a \frac{sint}{t}dt = [\frac{-cost}{t}]_1^a - \int_1^a \frac{cost}{t^2}dt.$$

D'autre part, $$|\int_1^a \frac{cost}{t^2}dt| \leq \int_1^a |\frac{cost}{t^2}|dt \leq \int_1^a \frac{1}{t^2}dt \leq [-\frac{1}{t}]_1^a.$$

Ce qui prouve bien que $\int_1^{+\infty} \frac{sinx}{x}dx$ est convergente modulo la proposition suivante.

Proposition Si une intégrale converge absolument alors elle converge.

Démonstration La convergence de l'intégrale en a ou en b résulte du critère de Cauchy:

$$|\int_u^v f(t)\ dt| \leq \int_u^v |f(t)|dt,$$

ceci pour tout couple $(u, v) \in I$. Par suite, puisque le critère de Cauchy est vérifié par $|f|$, il sera vérifié par f et donc l'intégrale est convergente.

Remarque importante La réciproque est fausse en général comme le montre l'exemple suivant.

$\int_0^{+\infty} \frac{sin\, t}{t}\ dt$ est convergente sans être absolument convergente. Nous traiterons plus tard cet exemple.

4. Fonctions équivalentes:

Proposition: Soient f et g deux fonctions définies, localement intégrables et qui gardent un même signe constant sur un intervalle $I = [a, b[$. Si f et g sont équivalentes au voisinage de b alors

$$\int_a^b f(t)dt, \text{ et } \int_a^b g(t)dt \text{ sont de même nature.}$$

Démonstration: On rappelle que deux fonctions sont équivalentes au voisinage de b s'il existe un voisinage de b de la forme $]b-\eta, b[$ et une fonction ψ définie sur ce voisinage tels que

$$f(t) = g(t)(1 + \psi(t)) \text{ avec } \lim_{t\to b}\psi(t) = 0.$$

Sur un voisinage convenable, et en supposant, par exemple, f et g positives, on a donc

$$\frac{1}{2}g(t) \leq f(t) \leq \frac{3}{2}g(t).$$

On voit bien que la convergence pour f implique la convergence pour g et la divergence pour f implique la divergence pour g.

Exemples: 1.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{tant}}dt \text{ est de même nature que } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}dt.$$

D'après le résultat précédent, il suffit de vérifier que les fonctions f et g définies par

$$f(t) = 1/\sqrt{t} \text{ et } g(t) = 1/\sqrt{tant}$$

sont équivalentes et gardent un signe constant au voisinage de 0 (où se pose le problème de convergence.)

2.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}cos\frac{1}{t}dt \text{ est divergente car } \int_1^{+\infty} \frac{1}{t}dt \text{ est divergente.}$$

En effet, les fonctions correspondantes sont équivalentes au voisinage de $+\infty$.

Mise en garde: Le résultat précédent n'est plus valable pour les fonctions ne gardant pas un signe constant. On a déjà vérifié que $\int_2^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$ converge mais

$$\int_2^{+\infty} \frac{sint}{t}(1 + \frac{sint}{lnt})dt \text{ diverge}$$

bien que les fonctions associées soient équivalentes au voisinage de $+\infty$.

$$\int_2^{+\infty} \frac{sin^2 t}{t\ lnt} dt \text{ est divergente, en effet}$$

$$\frac{sin^2 t}{t\ lnt} \geq \frac{sin^2 t}{(k+1)\pi\ ln((k+1)\pi)} \text{ pour } t \in [k\pi, (k+1)\pi],$$

en sommant les intégrales sur k, on obtient la divergence de l'intégrale qui résulte de la divergence de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)\pi\ ln((k+1)\pi)}. \qquad \text{(Exercice)}$$

La proposition suivante donne d'autres critères qui permettent dans certains cas de traiter rapidement le problème de convergence.

Proposition: 1. Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle de la forme $]a, b]$ avec a fini. On suppose qu'il existe $\alpha \in I\!R$ tel que $\lim_{t\to a}(t-a)^\alpha f(t)$ existe et vaut k.

- Si $\alpha < 1$, alors $\int_a^b f(t)dt$ converge absolument.
- Si $\alpha \geq 1$ et $k \neq 0$, $\int_a^b f(t)dt$ diverge.

2. Soit f une fonction définie et localement intégrable sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$. On suppose qu'il existe $\alpha \in I\!R$ tel que $\lim_{t\to+\infty} t^\alpha f(t)$ existe et vaut k.

- Si $\alpha > 1$ alors $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est absolument convergente.
- Si $\alpha \leq 1$ et $k \neq 0$ alors $\int_a^b f(t)dt$ est divergente.

Exemples: On peut étudier les intégrales de Riemann et de Bertrand à l'aide de ces critères.

$$\text{Pour } \int_0^1 \frac{1}{t^\beta} dt, \quad \text{si } \beta < 1,$$

on peut trouver α avec $\beta < \alpha < 1$ tel que

$$\lim_{t\to 0} t^\alpha \frac{1}{t^\beta} = 0,$$

ce qui assure la convergence de l'intégrale lorsque $\beta < 1$.

Pour les intégrales de Bertrand, c'est à dire de la forme

$$\int_a^b \frac{1}{t^\beta(|ln\ t|)^\gamma}dt, \text{ avec }]a,b[=]0,1[\text{ ou }]a,b[=]1,\infty[,$$

et si on se place dans le cas $a = 0$ et $b = 1$, on peut donner les valeurs de β et de γ pour lesquelles l'intégrale de Bertrand est convergente. Le cas $a = 1$ et $b = +\infty$ se traite de la même manière. (Exercice.)

5. Intégrales semi convergentes. Règle d'Abel.

Règle d'Abel: Soit f une fonction localement intégrable sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$, positive, décroissante et telle que $f(t)$ tend vers 0 lorsque t vers $+\infty$. Soit g une fonction localement intégrable sur $[a, +\infty[$.

On suppose qu'il existe un réel $M > 0$ tel que $\forall x \in [a, +\infty[$, $|\int_a^x g(t)dt| \leq M$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)g(t)dt$ est convergente.

Démonstration Pour montrer la convergence, on va utiliser le critère de Cauchy pour la convergence des intégrales et la deuxième formule de la moyenne. On se place sur un intervalle $[u, v] \subset [a, +\infty[$ et on considère

$$\int_u^v f(x)g(x)dx.$$

D'après la deuxième formule de la moyenne, il existe un point $c \in [u, v]$ tel que

$$\int_u^v f(x)g(x)dx = f(u+)\int_u^c g(x)dx.$$

$$\text{Ainsi } |\int_u^v f(x)g(x)dx| = |f(u+)\ \int_u^c g(x)dx| \leq 2M|f(u+)|.$$

Par suite, si $\varepsilon > 0$, alors pour u assez grand, on aura

$$|\int_u^v f(x)g(x)dx| < \varepsilon.$$

Le critère de Cauchy est vérifié et donc l'intégrale est convergente.

Exemples: 1. Nous avons déjà vu que

$$\int_1^{+\infty} \frac{sint}{t}dt$$

est convergente en utilisant une intégration par parties. Le critère d'Abel permet d'aboutir à la même conclusion. En effet, d'une part la fonction

$$t \longmapsto \frac{1}{t}$$

est localement intégrable, positive décroissante et tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$ et d'autre part on établit facilement que

$$|\int_c^d sin\ t\ dt| \leq 2\ ;\ \forall (c,d) \in I\!R^2.$$

Par application de la règle d'Abel, $\int_1^{+\infty} \frac{sint}{t} dt$ est convergente.

Remarque: Cette intégrale n'est pas absolument convergente. Pour voir cela, on se place sur des intervalles de la forme $I_n = [n\pi, (n+1)\pi]$, avec $n \in I\!N$. Pour tout $t \in I_n$, $|\frac{sint}{t}| \geq \frac{1}{(n+1)\pi}|sint|$ et par suite

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\frac{sint}{t}| dt \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |sint| dt \geq \frac{2}{(n+1)\pi}.$$

La dernière inégalité peut être obtenue en distinguant les cas n pair ou n impair, et en intégrant selon le cas $f(t) = sint$ ou $f(t) = -sint$. Enfin, en utilisant la relation de Chasles, on obtient:

$$\int_{\pi}^{n\pi} \frac{sint}{t} dt \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+1)\pi}.$$

On retrouve la suite harmonique qui diverge.

2. Pour étudier la convergence de

$$\int_0^{+\infty} tsin\ (t^3) dt,$$

et afin d'utiliser la règle d'Abel, on fait d'abord un changement de variable en posant $u = t^3$ qui permet d'obtenir

$$\int_0^{+\infty} \frac{sin\ u}{3u^{1/3}} du.$$

On pose $f(u) = \frac{1}{3u^{1/3}}$ et $g(u) = sin\ u$. On a alors la convergence de l'intégrale par application de la règle d'Abel.

6. Comparaison séries-intégrales.

Théorème Soit f une fonction positive, décroissante et localement intégrable sur $[0, +\infty[$. On considère la suite ou série $(u_n)_n$ définie par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k).$$

$\int_0^{+\infty} f(x)dx$ et $(u_n)_n$ sont de même nature.

Démonstration.

$$\text{On a } \int_1^n f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{n} u_k \leq \int_0^n f(x)dx.$$

Pour voir cela, il suffit de considérer $\sum_{k=1}^{n} u_k$ comme l'intégrale d'une certaine fonction en escalier, c'est à dire comme somme de surfaces de rectangles. La décroissance de f donne alors la double inégalité précédente.

Ainsi, si l'intégale converge alors la suite est convergente car croissante et majorée. Inversement, si la suite converge alors l'intégrale est majorée. Puisque f est positive, l'intégrale converge.

Exemple

$$\text{La suite } (\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ ln(k)})_n \text{ est divergente.}$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k\ ln(k)} \geq \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ ln(x)}dx$$

$$\text{et } \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ ln(x)}dx = [ln(|ln(x)|)]_2^{+\infty} = +\infty.$$

Remarque Pour avoir la convergence, une condition nécessaire mais non suffisante est

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

$$\text{En effet } \frac{1}{x} \text{ tend vers 0 mais } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx \text{ est divergente.}$$

Universite Mohammed V- Agdal
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Module Analyse 2

Filières SM et SMIA

Semestre 2

Chapitre 3

Hamza BOUJEMAA

Chapitre 3

Equations différentielles.

En plus de la physique où de nombreux phénomènes sont régis par des équations différentielles, d'autres domaines comme la biologie et l'étude des populations (dans un modèle "prédateur-proie" par exemple) font appel aux équations différentielles. C'est un domaine qui connait un grand développement motivé par des questions non encore résolues. En fait, on sait résoudre très peu d'équations différentielles. Les équations linéaires à coefficients constants, certaines équations linéaires à coefficients non constants et les équations à variables séparables font partie de celle qu'on sait résoudre.

L'objectif de chapitre est de donner les techniques nécessaires pour la résolution de certaines équations relativement simples. Tout d'abord, on précise ce qu'on entend par "équations différentielles" et par solutions d'une équation donnée vérifiant certaines conditions initiales. En particulier, on étudiera les équations homogènes, de Bernoulli et de Ricatti.

I. Définitions et vocabulaire

Définitions Soit $n \in \mathbb{N},\ n \geq 1$, on appelle équation différentielle d'ordre n et d'inconnue la fonction y toute relation de la forme

$$y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), ..., y^{(n-1)}(x)), \qquad (*)$$

avec les conditions initiales $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}, \qquad (**)$

où f est une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^{n+1}$, $(x_0, y_0, ..., y_{n-1})$ est vecteur fixé dans $\mathbb{R}^{n+1}$ et l'inconnue est une fonction y de classe $\mathcal{C}^n$ définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant x_0.

On appelle solution de cette équation toute fonction y de classe $\mathcal{C}^n$ définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 et vérifiant l'équation (*) ainsi que les conditions initiales (**).

La solution est dite maximale si l'intervalle ouvert est maximal. Autrement écrit, si on ne peut pas trouver une autre solution qui prolonge y.

Exemples 1. $y' = y + x$ avec $y(0) = 0$ est une équation différentielle du premier ordre. Ici, nous avons bien entendu

$$f(x, y(x)) = y(x) + x.$$

On peut vérifier que toute fonction de la forme

$$y(x) = Ke^x - x - 1, \text{ avec K constante arbitraire}$$

est une solution de l'équation et que

$$y(x) = e^x - x - 1$$

est une solution qui vérifie la condition initiale $y(0) = 0$. Il s'agit de la solution maximale qui vérifie la condition initiale donnée car elle est définie sur $\mathbb{R}$.

2. $y" - 3y' + 2y = 0$ avec $y(0) = 1,\ y'(0) = 3$ est une équation différentielle du second ordre et

$$y(x) = -e^x + 2e^{2x}$$

est une solution qui vérifie la condition initiale et elle est maximale. Si on remplace la condition initiale précédente par $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ alors la fonction $y(x) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ est la solution maximale.

3. $y"(x) = cos\ y(x)\ + y'(x)\frac{1}{1+x^2}$ avec $y(0) = 1\ y'(0) = 1$ est une équation différentielle du second ordre avec, dans ce cas, $f(x, y(x), y'(x)) = cos\ y(x)\ + y'(x)\frac{1}{1+x^2}$. Il n'est pas aisé de déterminer une solution de cette équation.

Nous allons dans le paragraphe suivant étudier certaines formes particulières d'équations différentielles du premier ordre.

II. Equations différentielles du premier ordre

1. Equations à variables séparables

Définition Une équation différentielle du premier ordre

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

est dite à variables séparables si elle peut être ramenée à la forme suivante

$$g(y(x))y'(x) = h(x)$$

où g et h sont deux fonctions définies sur un intervalle ouvert et continues.

En pratique, cela signifie qu'on peut séparer x et y.

Conséquence On a dans ce cas

$$\int g(y(x))y'(x)\ dx = \int h(x)\ dx,$$

et par suite si G et H désignent respectivement une primitive de g et de h, on aura

$$G(y) = H(x) + K.$$

On pourra ensuite essayer d'exprimer y en fonction de x.

Exemples 1. $y'(x) = x^2y(x) + x^2$ avec $y(0) = 1$ est à variables séparables. En effet, on peut la ramener à la forme

$$\frac{y'(x)}{y(x)+1} = x^2,$$

par suite, en passant aux primitives, on a

$$ln|y+1| = \frac{1}{3}x^3 + K,$$

ce qui conduit à

$$y(x) = K_1 e^{\frac{1}{3}x^3} - 1$$

K étant une constante arbitraire non nulle. La condition initiale $y(0) = 1$ entraine $K_1 = 2$. On peut remarquer que la fonction y constante égale à -1 est solution répondant à la condition initiale $y(0) = -1$. Par suite, dans la famille des solutions, K_1 peut prendre toutes les valeurs réelles possibles.

2. $(x^2+1)y'(x) = y^2 - 1$ est à variables séparables. On a

$$\frac{y'}{y^2-1} = \frac{1}{x^2+1}.$$

$$\frac{y'}{2(y-1)} - \frac{y'}{2(y+1)} = \frac{1}{x^2+1}.$$

En intégrant, les deux membres, et après simplification, on trouve

$$ln|\frac{y-1}{y+1}| = 2Arc\,tan(x) + K,$$

et il sera possible d'exprimer y en fonction de x.

2. Equations différentielles linéaires du premier ordre

Définitions On appelle équation différentielle linéaire du premier ordre toute équation différentielle de la forme

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

où a et b sont deux fonctions supposées définies et continues sur un intervalle ouvert donné de $\mathbb{R}$.

L'équation

$$y'(x) = a(x)y(x)$$

est dite équation homogène associée ou équation sans second membre. Elle sera souvent notée "ssm".

Exemple $y'(x)+y(x) = sin(x)$ est une équation linéaire du premier ordre où le second membre est la fonction $x \longmapsto sin(x)$ et $y'(x)+y(x) = 0$ est l'équation homogène associée.

Pour résoudre l'équation ssm, soit y_1 une solution quelconque. On pose

$$y(x) = e^{-\int a(x)\,dx} y_1(x).$$

Il est aisé d'assurer que y vérifie

$$y'(x) = 0,$$

et par suite on a nécessairement

$$y_1(x) = Ke^{\int a(x)\,dx} \qquad \text{où K est une constante arbitraire.}$$

Cette solution est définie sur l'intervalle ouvert sur lequel la fonction a est définie et continue.

Remarque Si y est une solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre ssm, alors ou bien y est la solution identiquement nulle ou bien y ne s'annule en aucun point.

Le théorème suivant permet de résoudre les équations différentielles linéaires du premier ordre avec second membre et à coefficients constants.

Théorème Soit y_0 une solution particulière de l'équation avec second membre, alors y est solution de l'équation avec second membre si et seulement si $(y - y_0)$ est solution de l'équation sans second membre.

Démonstration Elle ne présente pas de difficultés particulières. D'une part, y_0 vérifie

$$y_0'(x) = a(x)y_0(x) + b(x),$$

d'autre part, si y est une solution quelconque de l'équation avec second membre, y vérifie

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x),$$

ceci équivaut en soustrayant membre à membre les deux équations à

$$(y - y_0)(x) = a(x)[(y - y_0)(x)].$$

Ce qui prouve le théorème.

Remarque En pratique, pour résoudre l'équation avec second membre, il suffit d'ajouter une solution particulière de l'équation avec second membre à la solution générale de l'équation sans second membre. L'équation ssm est une équation à variables séparables

qu'on pourra résoudre en utilisant la méthode exposée au paragraphe précédent.

Pour avoir une solution particulière de l'équation avec second membre, la méthode de la variation de la constante est d'une grande utilité.

Méthode de la variation de la constante

A partir de la solution générale de l'équation ssm

$$y(x) = Ke^{\int a(x)\,dx}$$

la méthode consiste à considérer K comme une fonction de x et à remplacer dans l'équation avec second membre. On aura

$$y'(x) = K'(x)e^{\int a(x)\,dx} + a(x)K(x)e^{\int a(x)\,dx}.$$

En reportant dans l'équation avec second membre, on obtient

$$K'(x) = b(x)e^{-\int a(x)\,dx}.$$

Par suite, on a $K(x) = \int b(x)e^{-\int a(x)\,dx}\,dx$ et il suffit de trouver une seule fonction K pour déduire une solution particulière de l'équation avec second membre.

Exemples On considère l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = sin(x).$$

La solution générale de l'équation ssm est

$y(x) = Ke^{-x}$, et la méthode de la variation de la constante donne

$K'(x) = sin(x)e^x$. On en déduit $K(x) = \frac{1}{2}(sin(x) + cos(x))e^x$.

Par conséquent, la solution générale de l'équation donnée est

$$y(x) = Ke^{-x} + \frac{1}{2}(sin(x) + cos(x)).$$

Exemples particuliers 1. Considérons l'équation différentielle

$xy'(x) = -y(x) + x^2$ avec la condition initiale $y(0) = 0$.

On peut noter que, dans la forme donnée, l'équation différentielle n'impose pas la condition $x \neq 0$. Pour la résoudre, on peut noter que c'est une équation différentielle linéaire du premier ordre dont l'équation ssm associée à variables séparables

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -\frac{1}{x}.$$

Cette forme suppose $x_0 \neq 0$ et $y_0 \neq 0$, et la résolution donne les solutions

$$y(x) = K\frac{1}{x} \qquad K \text{ étant une constante qui dépend des conditions intiales.}$$

La solution de l'équation complète est

$$y(x) = K\frac{1}{x} + \frac{1}{3}x^2 \qquad (*)$$

Cette solution est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$ selon la condition initiale.

Maintenant, si on cherche une solution z qui vérifie la condition initiale $z(0) = 0$, on remarque que cette solution ne peut pas être identiquement nulle sur un voisinage de 0. Par conséquent, il existe x_0 voisin de 0 tel que $z(x_0) = k_0 \neq 0$. Ici encore, l'idée est de choisir (x_0, k_0) comme condition initiale. On peut conclure que z coincide avec une solution de la forme (*) sur un intervalle ouvert contenant x_0. Comme précédemment, ces deux solutions coincident sur $\mathbb{R}_+^*$ si on suppose $x_0 > 0$. Or ceci est impossible car z est de classe $\mathcal{C}^1$, par suite elle doit admettre une limite finie à droite de 0 ce qui ne serait pas vrai. Ainsi, il n'existe pas de solution répondant à la condition initiale $(0, 0)$.

2. Considérons l'équation différentielle

$$xy'(x) = 2y(x) - x \text{ avec la condition initiale } y(0) = 0.$$

En procédant comme précédemment, on obtient la famille de solutions

$$y(x) = Kx^2 + x \qquad K \text{ constante réelle.}$$

Contrairement à la situation précédente, on peut ici prolonger les solutions en 0. Pour cet exemple, on a une infinité de solutions qui répondent à une condition initiale donnée. En effet, choisissons, par exemple, la condition intiale $y(1) = 3$, alors il est clair que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$y(x) = 2x^2 + x \qquad \text{est une solution.}$$

On peut construire une infinité de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ qui vérifient cette condition initiale de la façon suivante: On pose $y(x) = 2x^2 + x$ si $x \geq 0$ et $y(x) = Kx^2 + x$ si $x \leq 0$, où K est une constante arbitraire. Il faut remarquer de la fonction proposée est bien de classe $\mathcal{C}^1$.

3. Equations homogènes du premier ordre

Définitions Ce sont les équations du type

$$y'(x) = f(\frac{y(x)}{x}).$$

Pour résoudre ce genre d'équations, le changement de variable $y(x) = x\ \alpha(x)$, où α est une fonction à déterminer, permet de transformer l'équation initiale en une équation du premier ordre à variables séparables.

Exemples

$$x^2y'(x) = y^2(x) + xy(x) + x^2$$

est une équation homogène. En effet, elle peut être ramenée à la forme

$$y'(x) = \frac{y^2(x)}{x^2} + \frac{y(x)}{x} + 1,$$

dans ce cas, f est la fonction vérifiant $f(t) = t^2 + t + 1,\ \forall x \in I\!R$.

Après simplication, le changement de variable précédent permet d'obtenir

$$\alpha'(x)x + \alpha(x) = \alpha^2(x) + \alpha(x) + 1 \text{ c'est à dire } \frac{\alpha'(x)}{\alpha^2(x)+1} = \frac{1}{x}.$$

D'où $\alpha(x) = tan(ln|x| + K)$, et par suite, $y(x) = x\ tan(ln|x| + K)$.

4. Equations de Bernoulli

Ce sont les équations différentielles du premier ordre de la forme

$$y'(x) + a(x)y(x) + b(x)y^n(x) = 0, \text{ avec } n \geq 2,$$

où a et b sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert de $I\!R$ et supposées continues.

La méthode de résolution consiste à diviser par y^n ce qui conduit, modulo un changement de variable, à une équation différentielle linéaire du premier ordre. En effet, on a

$$\frac{y'(x)}{y^n(x)} + \frac{a(x)}{y^{n-1}(x)} + b(x) = 0.$$

Si on pose $z(x) = \frac{1}{y^{n-1}(x)}$, on a

$$\frac{1}{1-n}z'(x) + a(x)z(x) + b(x) = 0.$$

Exemple $y'(x) + x^2y(x) + x^5y^2(x) = 0$ avec $y(0) = 1$ est de Bernoulli. On pose donc $z(x) = \frac{1}{y(x)}$ et on obtient l'équation

$$-z'(x) + x^2z(x) + x^5 = 0.$$

La résolution de l'équation ssm donne

$$z(x) = Ke^{x^3/3}, \text{ et la variation de la constante donne } K'(x) = x^5e^{-x^3/3}.$$

A l'aide d'une intégration par parties, on obtient

$$K(x) = (-x^3 - 3)e^{-x^3/3}, \text{ par suite } z(x) = Ke^{x^3/3} - x^3 - 3, \text{ et finalement}$$

$y(x) = \dfrac{1}{Ke^{x^3/3} - x^3 - 3}$, ou la constante K est à déterminer selon la condition initiale. Dans notre cas, on a

$$y(x) = \frac{1}{4e^{x^3/3} - x^3 - 3}.$$

Remarque importante Nous nous sommes permis de diviser par y^n, or ceci n'est possible que si la fonction y ne s'annule jamais. Il s'avère que la fonction identiquement nulle est solution de toute équation de Bernoulli et si y est une autre solution s'annulant en un point t_0, alors, d'après l'unicité de la solution maximale, y devrait être la fonction identiquement nulle. Ceci justifie donc que mise à part la solution triviale, toutes les autres solutions ne s'annulent en aucun point.

5. Equations de Ricatti

Ce sont les équations différentielles du premier ordre de la forme

$$y'(x) = a(x)y^2(x) + b(x)y(x) + c(x),$$

où a, b et c sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et supposées continues.

Quand on connait une solution particulière y_0 de cette équation, on fait le changement de variable

$$z = y - y_0.$$

L'intérêt est que nous obtenons une équation qui est de Bernoulli en z,

$$z'(x) = a(x)z^2(x) + (2a(x)y_0(x) + b(x))z(x).$$

Remarque importante. Avant de passer à l'autre paragraphe, il est utile de remarquer que toutes les solutions maximales obtenues pour les différents types d'équations sont uniques une fois la condition initiale choisie. On parle d'existence et d'unicité de la solution maximale.

III. Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Ce sont les équations différentielles linéaires de la forme

$$y"(x) + ay'(x) + by(x) = c(x), \text{ avec } n \geq 2, \qquad (*)$$

où a et b sont deux constantes réelles et c une fonction supposée continue sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. c est le second membre de l'équation.

Comme pour les équations différentielles linéaires du premier ordre, on a le résultat suivant:

Théorème Soit y_0 une solution particulière de l'équation avec second membre, alors y est solution de l'équation avec second membre si et seulement si $(y - y_0)$ est solution de l'équation sans second membre.

Remarque En pratique, pour résoudre l'équation avec second membre, il suffit d'ajouter une solution particulière de l'équation avec second membre à la solution générale de l'équation sans second membre.

Pour résoudre l'équation l'équation ssm, on a besoin de définir l'équation caractéristique.

Définition L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle linéaire du second ordre est

$$r^2 + ar + b = 0.$$

Le théorème suivant permet de donner un algorithme de résolution.

Théorème On pose $\Delta = a^2 - 4b$.

1. Si $\Delta > 0$ et si λ_1 et λ_2 sont les deux racines réelles distinctes de l'équation caractéristique alors la solution générale de l'équation ssm est donnée par

$$y(x) = K_1 e^{\lambda_1 x} + K_2 e^{\lambda_2 x}, \ K_1 \text{ et } K_2 \text{ étant deux constantes réelles.}$$

2. Si $\Delta = 0$ et si λ_0 est la racine double de l'équation caractéristique, alors la solution générale de l'équation ssm est donnée par

$$y(x) = (K_1 x + K_2) e^{\lambda_0 x}, \ K_1 \text{ et } K_2 \text{ étant deux constantes réelles.}$$

3. Si $\Delta < 0$ et si $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ sont les deux racines complexes conjuguées, alors la solution générale de l'équation ssm est donnée par

$$y(x) = (K_1 cos(\beta x) + K_2 sin(\beta x)) e^{\alpha x} \ K_1 \text{ et } K_2 \text{ étant deux constantes réelles.}$$

Démonstration On suppose $b = 0$. L'équation devient

$$y"(x) + ay'(x) = 0.$$

Dans ce cas, le changement de variable $z = y'$ transforme l'équation initiale en une équation différentielle du premier ordre ssm à coefficients constants. En effet, on obtient

$$z'(x) + az(x) = 0$$

$$\text{dont la solution générale est de la forme} \qquad z(x) = Ke^{-ax},$$

où K est une constante réelle dépendant des conditions initiales. Ainsi, en revenant à la fonction y, on a

$$y'(x) = Ke^{-ax}.$$

Cette dernière équation admet la solution générale suivante

$$y(x) = -Ke^{-ax} + K_0,$$

K_0 étant une nouvelle constante d'intégration. Nous avons bien établi le théorème dans le cas où b est nul. En effet, dans ce cas, les deux solutions réelles sont $\lambda_1 = -a$ et $\lambda_2 = 0$.

On suppose à présent $b \neq 0$ et on introduit la variable

$$z = y' + \gamma y \text{ où } \gamma \text{ est un réel que nous allons préciser.}$$

En reportant dans l'équation (*), on a

$$z'(x) + (a - \gamma)z(x) + (\gamma^2 - a\gamma + b)y(x) = 0.$$

Si $a^2 - 4b > 0$, et si $\lambda_1 = (1/2)(a + \sqrt{a^2 - 4b})$ et $\lambda_2 = (1/2)(a - \sqrt{a^2 - 4b})$ sont les deux racines réelles, pour le choix $\gamma = \lambda_1$, on a

$$z'(x) + \lambda_2 z(x) = 0,$$

et pour le choix $\gamma = \lambda_2$ on

$$z'(x) + \lambda_1 z(x) = 0.$$

On obtient, comme solution générale, respectivement

$$z(x) = Ke^{-\lambda_2 x} \text{ et} z(x) = Ke^{-\lambda_1 x}.$$

Le premier cas donnera

$$z(x) = y'(x) + \lambda_1 y(x) = Ke^{-\lambda_2 x},$$

et le second

$$z(x) = y'(x) + \lambda_2 y(x) = Ke^{-\lambda_1 x}.$$

Nous reconnaissons deux équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants et qui admettent le même ensemble de solutions

$$y(x) = K_1 e^{-\lambda_1 x} + K_2 e^{-\lambda_2 x}.$$

Il faut remarquer pour finir que $-\lambda_1$ et $-\lambda_2$ sont les deux racines réelles de l'équation caractéristique.

Il reste à étudier le cas $\Delta = a^2 - 4b < 0$. Dans ce cas nous avons deux racines complexes conjuguées pour l'équation

$$\alpha^2 - a\alpha + b = 0,$$

et l'idée de la démonstration consiste à chercher les solution à valeurs dans $\mathbb{C}$ puis à déduire toutes les solutions possibles à valeurs réelles.

Dans ce cas, nous obtenons de la même manière

$$z(x) = Ke^{-\lambda_2 x} \text{ et} z(x) = Ke^{-\lambda_1 x},$$

où, cette fois-ci, λ_1 et λ_2 sont les deux racines complexes conjuguées de l'équation

$$\gamma^2 - a\gamma + b = 0$$

et K une constante complexe .

Par suite, on a les solutions correspondantes

$$y(x) = K_1 e^{-\lambda_1 x} + K_2 e^{-\lambda_2 x},$$

où K_1 et K_2 sont deux constantes complexes arbitraires.

Si nous voulons déduire toutes les solutions réelles possibles, K_1 et K_2 doivent être complexes conjugées. Par suite, si on pose

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta,\ \lambda_2 = \alpha - i\beta,\ K_1 = \eta + i\delta, \text{ et } K_2 = \eta - i\delta,$$

y sera nécessairement de la forme

$$y(x) = [2\eta cos(\beta\ x) - 2\delta sin(\beta\ x)]e^{\alpha\ x}.$$

Finalement, si on pose $K_1 = 2\eta$ et $K_2 = -2\delta$, on retrouve le résultat annoncé.

Remarque Il faut noter que nous avons bien déterminé toutes les solutions possibles pour les équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants sans second membre et nous avons par la même occasion obtenu la proposition suivante.

Proposition L'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 dont une base est $\{y_1, y_2\}$ avec:

$y_1(x) = e^{\lambda_1 x},\ y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$ si on a deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2.

$y_1(x) = e^{\lambda_0 x},\ y_2(x) = xe^{\lambda_0 x}$ si on a une racine double λ_0.

$y_1(x) = cos(\beta x)e^{\alpha x},\ y_2(x) = sin(\beta x)e^{\alpha x}$ si on a deux racines complexes conjuguées $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$.

Exemples 1. Pour trouver les solutions de $y" + y' - 2y = 0$, on commence par écrire l'équation caractéristique

$$r^2 + 2r - 2 = 0$$

qui admet deux solutions réelles distinctes $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -2$.

La solution générale de cette équation est donc de la forme

$$y(x) = K_1 e^x + K_2 e^{-2x}.$$

2. Pour trouver les solutions de $y" - 4y' + 4y = 0$, on commence par écrire l'équation caractéristique

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

qui admet une solution réelle double $\lambda_0 = 2$.

La solution générale de cette équation est donc de la forme

$$y(x) = (K_1 x + K_2)e^{2x}.$$

3. Pour trouver les solutions de $y" - 2y' + 2y = 0$, on commence par écrire l'équation caractéristique

$$r^2 - 2r + 2 = 0$$

qui admet deux solutions complexes conjuguées $\lambda_1 = 1 + i$ et $\lambda_2 = 1 - i$.

La solution générale de cette équation est donc de la forme

$$y(x) = (K_1 cos\ x + K_2 sin\ x)e^x.$$

Pour compléter l'étude, il reste à ajouter une solution particulière de l'équation avec second membre. Pour cela, on va adapter la méthode de la variation de la constante aux équations linéaires du second ordre.

Méthode de recherche d'une solution particulière de l'équation avec second membre

Dans chacun des trois cas qui peuvent se présenter, la solution générale est de la forme

$$y(x) = K_1 y_1(x) + K_2 y_2(x).$$

La méthode consiste à considérer K_1 et K_2 comme des fonctions de x. Par suite, on pose

$$y(x) = K_1(x) y_1(x) + K_2(x) y_2(x).$$

De plus, comme il suffit de trouver une solution particulière, nous allons imposer une restriction. Nous allons chercher une solution particulière de la forme

$$y(x) = K_1 y_1(x) + K_2 y_2(x),$$

avec la condition

$$K_1'(x) y_1(x) + K_2'(x) y_2(x) = 0.$$

Maintenant, si on cherche $y'(x)$, $y"(x)$ puis on reporte dans l'équation (*), on obtient l'équation

$$K_1'(x) y_1'(x) + K_2'(x) y_2'(x) = c(x)$$

où $c(x)$ est le second membre de l'équation différentielle. Nous avons donc à résoudre le système suivant

$$\begin{cases} K_1'(x) y_1(x) + K_2'(x) y_2(x) = 0 \\ K_1'(x) y_1'(x) + K_2'(x) y_2'(x) = c(x) \end{cases}$$

Si on note

$$W(y_1, y_2)(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix},$$

alors on déduit

$$K_1'(x) = \frac{-y_2(x) c(x)}{W(y_1, y_2)((x)} \text{ et } K_2'(x) = \frac{y_1(x) c(x)}{W(y_1, y_2)(x)}.$$

On cherchera alors à trouver une primitive K_1 et une primitive K_2.

Définition. La fonction $W(y_1, y_2)$ s'appelle le wronskien de y_1 et de y_2.

Remarques 1. On peut noter que dans chacun des trois cas possibles, le wronskien des fonctions correspondantes ne s'annule en aucun point.

2. Plus généralement, si f et g sont deux solutions de l'équation ssm linéairement indépendantes, c'est à dire, telles que

$$\mu f(x) + \nu g(x) = 0 \ \forall x \in I\!R \ \Rightarrow \ \mu = \nu = 0,$$

alors

$$W(f, g)(x) \neq 0, \ \forall x \in I\!R.$$

En effet, supposons qu'il existe $x_0 \in I\!R$ tel que $W(f,g)(x_0) = 0$. Alors les vecteurs

$$u_1 = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f'(x_0) \end{pmatrix} \text{ et } u_2 = \begin{pmatrix} g(x_0) \\ g'(x_0) \end{pmatrix}$$

sont linéairement dépendants.

Supposons, par exemple, $u_1 = \alpha u_2$ pour un certain réel α convenable. Considérons ensuite les deux fonctions f et αg. Elles sont toutes les deux solutions de l'équation différentielle ssm, répondant à la même condition initiale

$$y(x_0) = f(x_0) \text{ et } y'(x_0) = f'(x_0).$$

Elles sont donc égales d'après l'unicité de la solution. Par suite, on a

$$f(x) = \alpha g(x) \ \forall x \in I\!R.$$

Nous avons aussi obtenu que le wronskien de deux solutions s'annule en un point si et seulement si il s'annule partout.

Exemple. On se propose de résoudre l'équation différentielle suivante

$$y" + y = \frac{1}{sin(x)}.$$

Nous savons d'après l'exemple précédent que la solution générale de l'équation ssm est

$$y(x) = K_1 cos(x) + K_2 sin(x).$$

Dans ce cas, on a

$$W(y_1, y_2)(x) = 1.$$

D'après la méthode de la variation de la constante, et après calcul, on doit résoudre

$$K_1'(x) = -1, \text{ et } K_2'(x) = \frac{cos(x)}{sin(x)}.$$

On obtient alors

$$K_1(x) = -x, \text{ et } K_2(x) = ln|sin(x)|.$$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est

$$y_0(x) = -xcos(x) + sin(x)ln|sin(x)|.$$

On en déduit donc la solution générale de l'équation avec second membre

$$y(x) = K_1 cos(x) + K_2 sin(x) + y_0(x).$$

Pour clore ce chapitre, nous allons donner des méthodes qui permettent de trouver plus rapidement une solution particulière de l'équation avec second membre lorsque celui-ci a une certaine expression.

Quelques seconds membres particuliers.

1. Si le second membre est une fonction polynôme P, on cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme de même degré, ou de degré le degré de P augmenté de 1 ou de 2 selon que b est non nul, que b est nul et a est non nul ou que b est nul et a est nul aussi.

Exemple $y" - 3y' = x$. On cherche une solution particulière sous la forme $a_2x^2 + a_1x + a_0$.

2. Si le second membre est de la forme

$$P(x)e^{\gamma x},$$

où P est polynôme de degré quelconque, on cherche une solution particulière sous la forme

$$R(x)e^{\gamma x},$$

où R est un polynôme de même que P si γ n'est pas solution de l'équation caractéristique, de degré celui de P augmenté de 1 si γ est racine simple de l'équation caractéristique, augmenté de 2 si γ est racine double de cette équation.

Exemple $y" + y' - 2y = (x+1)e^x$. On cherche une solution particulière sous la forme $(a_2x^2 + a_1x + a_0)e^x$.

Principe de superposition Si le second membre se présente sous la forme d'une somme de fonctions

$$c_1(x) + ... + c_n(x)$$

on cherche une solution particulière correspondant à chacune des fonctions c_i, $1 \leq i \leq n$ séparément, puis d'après la linéarité on ajoute les différentes solutions particulières trouvées. On dit qu'on les superpose.

Chapitre 4

Courbes paramétrées.

Jusqu'à présent, les courbes qui ont été étudiées correspondaient à des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ ou une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, et les graphes correspondant avaient la particularité de ne pas admettre de points doubles ni de revenir sur eux-mêmes: A une valeur donnée de x correspond au plus une valeur de y. Or, la plupart des courbes ou des trajectoires rencontrées dans plusieurs situations peuvent avoir un comportement quelconque. Il est par conséquent nécessaire d'introduire de nouveaux types de courbes qui répondent à ce genre de situation.

I. Introduction.

1. Fonctions vectorielles.

Définition Une fonction vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ est une application définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

$$F : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto F(t) = (x(t), y(t)).$$

A est l'ensemble de définition de la fonction F.

Sur $\mathbb{R}^2$, on choisit la norme euclidienne

$$||(x, y)|| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

et on dira que la suite $(u_n = (x_n, y_n))_n$ tend vers (α, β) si $||(x_n - \alpha, y_n - \beta)||$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Cela équivaut à dire que les deux suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ tendent respectivement vers α et vers β.

Etudier la courbe paramétrée définie par F signifie tracer dans le plan $\mathbb{R}^2$ l'image de A par la fonction F c'est à dire l'ensemble des points $M(t) = (x(t), y(t))$ lorsque t parcourt A. La fonction F sera supposée posséder certaines propriétés comme la continuité et la dérivabilité en tant que fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Nous devons donc préciser ces notions.

Définitions Soit $t_0 \in A$, on suppose que t_0 appartient à un intervalle ouvert contenu dans A. On dit que F est continue en t_0 si $F(t)$ tend vers $F(t_0)$ lorsque t tend vers t_0.

On dit que F est dérivable en t_0 si le rapport

$\frac{F(t)-F(t_0)}{t-t_0}$ tend vers une limite finie notée $F'(t_0)$ lorsque t tend vers t_0.

Remarquons que lorsque F est dérivable en t_0, la limite $F'(t_0)$ est en fait un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

On a les résultats suivants:

Proposition F est continue en t_0 si et seulement si les deux fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ sont continues en t_0.

F est dérivable en t_0 si et seulement les deux fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$ sont dérivables en t_0 et on a

$$F'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)).$$

Démonstration. D'après la norme euclidienne, on a

$$||F(t) - F(t_0)|| = \sqrt{(x(t) - x(t_0))^2 + (y(t) - y(t_0))^2}.$$

Ainsi, si $F(t)$ tend vers $F(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ alors $x(t)$ tend vers $x(t_0)$ et $y(t)$ tend vers $y(t_0)$. Inversement, si $x(t)$ tend vers $x(t_0)$ et $y(t)$ tend vers $y(t_0)$ alors $F(t)$ tend vers $F(t_0)$.

De même, si F est dérivable en t_0 et si on note $F'(t_0) = (l, k)$ alors forcément les rapports

$$\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \text{ et } \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}$$

tendent respectivement vers l et k.

La réciproque s'établit de la même manière.

Définitions On dit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur A si F est dérivable en tout point de A et si sa fonction dérivée

$$t \longmapsto F'(t) \text{ est continue sur } A.$$

F est dite de classe $\mathcal{C}^n$ sur A, où n est un entier supérieur ou égal à 1, si F est n fois dérivable sur A et si sa dérivée d'ordre n est continue sur A.

Nous allons donner sans démonstration la formule de Taylor-Young pour une fonction vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Formule de Taylor-Young.

Soit F une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle ouvert I contenant t_0 et contenu dans A, alors, pout tout $t \in I$, on a

$$\mathbf{F(t) = F(t_0) + (t - t_0)F'(t_0) + \frac{1}{2!}(t - t_0)^2F^{(2)}(t_0) + ... + \frac{1}{n!}(t - t_0)^nF^{(n)}(t_0) + (t - t_0)^n\varepsilon(t - t_0)},$$

où ε est un fonction définie sur I à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ qui est telle que

$$\varepsilon(t) \text{ tend vers } (0,0) \in \mathbb{R}^2 \text{ lorsque } t \text{ tend vers } t_0.$$

Signalons tout de même que cette formule résulte des deux formules de Taylor-Young pour les fonctions x et y et la fonction ε a pour fonctions composantes $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ où ε_1 et ε_2 sont données par les restes des deux formules de Taylor-Young de x et de y.

2. Points stationnaires et vecteurs tangents.

Définition On dit que $F(t_0)$ est un point stationnaire si $F'(t_0) = 0$.

Remarque. L'étude des courbes paramétrées permet en particulier de décrire les trajectoires correspondant à des solutions d'équations différentielles. Lorsqu'on a $F'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) = 0$ cela signifie que la vitesse s'annule d'où l'origine du mot stationnaire.

Proposition Soit p le plus petit entier, supérieur ou égal à 1, tel que $F^{(p)}(t_0) \neq 0$, (on suppose qu'un tel p existe) alors le vecteur $F^{(p)}(t_0) = (x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0))$ est un vecteur tangent à la courbe au point $F(t_0)$.

Démonstration Grâce à la formule de Taylor-Young, nous pouvons écrire

$$F(t) - F(t_0) = (t - t_0)^p(x^{(p)}(t_0) + \varepsilon_1(t - t_0), y^{(p)}(t_0) + \varepsilon_2(t - t_0)),$$

où on a posé $\varepsilon(t - t_0) = (\varepsilon_1(t - t_0), \varepsilon_2(t - t_0))$. Les deux fonctions ε_1 et ε_2 sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ et tendent vers 0 lorsque t tend vers t_0.

Si $p = 1$, le vecteur $\dfrac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} = \dfrac{1}{t - t_0}[(t-t_0)^p(x^{(p)}(t_0)+\varepsilon_1(t-t_0), y^{(p)}(t_0)+\varepsilon_2(t-t_0))]$

tend vers le vecteur $(x'(t_0), y'(t_0))$ qui est donc vecteur tangent à la courbe, et si $p > 1$, le même vecteur tend vers le vecteur nul avec la direction $(x^{(p)}(t_0), y^{(p)}(t_0))$ qui est donc vecteur tangent dans ce cas.

II. Etude des courbes paramétrées .

Parmi les volets qui devront être étudiés, nous avons les variations de x et de y en fonction de t. Il faut souligner que lors du tracé, il s'agit de situer les points $(x(t), y(t))$. La variable t ne figurera pas sur les axes et par suite lorsqu'on étudie le comportement de x et de y pour t croissant, il est utile de penser que t correspond au temps et ce qu'on va dessiner et par suite observer, c'est tout simplement la trajectoire d'un point au cours du temps. Nous devrons aussi étudier l'existence d'éventuelles symétries, d'éventuels points doubles ainsi que d'éventuelles branches infinies. Pour terminer nous mettrons l'accent sur l'étude de la courbe au voisinage d'un point stationnaire et nous introduirons les notions de points de concavité, d'inflexion et de rebroussement.

1. Variations.

Une fois le domaine de définition fixé et la dérivabilité des composantes x et y justifiées, on peut considérer les dérivées de ces fonctions puis étudier leurs signes et déduire la monotonie de x et de y. Nous allons traiter un exemple.

Exemple Soit la courbe paramétrée donnée par les deux équations suivantes

$$\begin{cases} x(t) = 3t - t^3 \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}.$$

L'ensemble de définition est $\mathbb{R}^*$. De plus, il est utile de remarquer que la fonction x est impaire et que la fonction y est paire. Cela entraine que les points $(x(t), y(t))$ et $(x(-t), y(-t))$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Par conséquent, il suffit d'étudier la courbe sur $\mathbb{R}_+^*$, et on complétera par une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

D'une part, la fonction x est une fonction polynômiale et donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et d'autre part y est une fonction rationnelle donc dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Les dérivées sont

$$x'(t) = 3(1 - t^2) \qquad\qquad y'(t) = \frac{2(t^2 - 1)(t^2 + 1)}{t^3}.$$

Nous avons les variations suivantes:

t	0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	
$x(t)$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$
$y'(t)$		$-$	0	$+$	

$$\begin{array}{ccccccc} y(t) & & +\infty & \searrow & 2 & \nearrow & +\infty \end{array}$$

Commentaire Lorsque t croit de 0 exclu jusqu'à 1, pour le tracé, on se déplacera vers la droite car x croit et en même temps on se déplacera vers le haut car y croit. De même, lorsque t varie de 1 jusqu'à $+\infty$, on se déplacera vers la gauche car x décroit et vers le haut car y croit.

Remarques sur les symétries

- Si on a x paire et y impaire, alors on complète par une symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

- Si on a x impaire et y impaire, on complète par une symétrie par rapport à l'origine.

- Si $M(t) = M(1/t)$ pour $t \neq 0$, alors il suffit de faire l'étude sur $]0, 1]$ (ou sur $[-1, 0[$) et déduire le même comportemet sur $[1, +\infty[$ (ou sur $]-\infty, -1]$).

- Si on a x paire et y paire, alors on retrouve le même point la courbe sera donc parcourue deux fois, une fois dans un sens et l'autre fois dans le sens contraire.

- Si enfin x et y sont des fonctions périodiques comme par exemple

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = sin(t) + 3cos(2t) \\ y(t) = sin^2(t) - cos(4t) \end{array} \right. ,$$

pour lequel $T = 2\pi$ est une période, la courbe sera parcourue indéfiniment toujours dans le même sens. En principe, on aura une courbe fermée.

Remarquons aussi que le point $(x(1), y(1))$ est un point stationnaire.

2. Points doubles.

Définition Un point de la courbe est dit double s'il est atteint en deux valeurs différentes t_0 et t_1 de t.

Exemple Reprenons l'exemple $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = 3t - t^3 \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{array} \right.$.

Nous devons donc résoudre le système $\left\{ \begin{array}{l} 3t_1 - t_1^3 = 3t_0 - t_0^3 \\ t_1^2 + \frac{1}{t_1^2} = t_0^2 + \frac{1}{t_0^2} \end{array} \right.$.

Nous obtenons le système équivalent suivant $\left\{ \begin{array}{l} (t_1^2 - t_0^2)(t_0^2 t_1^2 - 1) = 0 \\ t_1^2 + t_0 t_1 + t_0^2 = 3 \end{array} \right.$,

qui donne les possibilités $t_0 = t_1$, $t_0 = -t_1$, $t_0 t_1 = 1$ et $t_0 t_1 = -1$.

Après résolution, on obtient

$$t_0 = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \qquad t_1 = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$
$$t_0 = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} \qquad t_1 = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$
$$t_0 = \sqrt{3} \qquad t_1 = -\sqrt{3}.$$

Les points doubles sont: $(-\sqrt{2}, 4)$, $(\sqrt{2}, 4)$ et $(0, \frac{10}{3})$.

3. Branches infinies.

L'étude des branches infinies se présente lorsque pour t tendant vers t_0, t_0 étant fini ou infini, $x(t)$ et $y(t)$ tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Dans ce cas, si le rapport $\frac{x(t)}{y(t)}$ tend vers 0 lorsque t tend vers t_0, alors on a une branche parabolique dans la direction (Oy) et si ce rapport tend vers ∞, on a une branche parabolique dans la direction (Ox).

Si ce rapport tend vers un nombre réel a, alors on étudie la limite de $y(t) - ax(t)$ lorsque t tend vers t_0.

Si cette limite est infinie on a une branche parabolique dans la direction de la droite d'équation $y = ax$. Si cette limite est finie et vaut b, alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe.

Dans le cas où on a une asymptote à la courbe, on peut étudier les positions relatives en étudiant le signe de

$$y(t) - (ax(t) + b),$$

si ce signe est positif, la courbe se trouve au dessus de l'asymptote lorsque t tend vers t_0 et si ce signe est négatif la courbe se trouve en dessous de cette asymptote lorsque t tend vers t_0.

Exemple 1 Pour la courbe paramétréee donnée par

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t^2-4t} \\ y(t) = \frac{t^2-1}{t} \end{cases},$$

on vérifie facilement que lorsque t tend vers 0^+, $x(t)$ tend vers $-\infty$ et $y(t)$ tend vers $-\infty$ et que lorsque t tend vers 0^-, $x(t)$ tend vers $+\infty$ et $y(t)$ tend vers $+\infty$. Le rapport

$$\frac{y(t)}{x(t)} = (t^2-1)(t-4) \text{ tend vers } 4 \text{ lorsque } t \text{ tend vers } 0.$$

D'autre part, $y(t) - 4x(t)$ tend vers $\frac{1}{4}$. Par conséquent, la droite d'équation $y = 4x + \frac{1}{4}$ est asymptote oblique à la courbe.

Pour la position de la courbe par rapport à cette asymptote, on étudie le signe de $y(t) - (4x(t) + \frac{1}{4})$ selon que t est plus petit ou plus grand que 0. (Exercice.)

Exemple 2 Nous reprenons un exemple précédent

$$\begin{cases} x(t) = 3t - t^3 \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}.$$

Lorsque t tend vers $+\infty$, $x(t)$ tend vers $-\infty$ et $y(t)$ tend vers $+\infty$. Le rapport

$$\frac{x(t)}{y(t)} = \frac{3t^3 - t^5}{t^4 + 1}$$

tend vers $-\infty$ lorsque t vers $+\infty$. Par conséquent, on a une branche parabolique dans la direction (Ox).

4. Etude des points singuliers.

Définition Un point $F(t_0) = M(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ est dit singulier si il existe p entier naturel supérieur ou égal à 2 tel que

$$F'(t_0) = F^{(2)}(t_0) = ... = F^{(p-1)}(t_0) = 0 \text{ et } F^{(p)}(t_0) \neq 0.$$

Il faut noter qu'en un tel point, la courbe peut avoir plusieurs comportements. Pour clarifier cette situation, nous allons décomposer le vecteur $F(t)$ suivant une base convenablement choisie.

On écrit la formule de Taylor-Young pour F à un ordre suffisamment élevé, F étant supposée de classe $\mathcal{C}^n$ où n est un entier naturel assez grand.

Si q désigne le plus petit entier supérieur à p pour lequel le vecteur $u_q = F^{(q)}(t_0)$ est non colinéaire au vecteur $u_p = F^{(p)}(t_0)$, on a

$$\mathbf{F(t) = F(t_0) + \frac{1}{p!}(t - t_0)^p F^{(p)}(t_0) + ... + \frac{1}{q!}(t - t_0)^q F^{(q)}(t_0) + (t - t_0)^q \varepsilon(t - t_0)},$$

Dans la base $\{u_p, u_q\}$, on a

$$F(t) - F(t_0) = \alpha_p(t)(t - t_0)^p u_p + \alpha_q(t)(t - t_0)^q u_q,$$

où α_p et α_q sont deux fonctions de t qui tendent respectivement vers $1/p!$ et $1/q!$ lorsque t tend vers t_0. On a la proposition suivante:

Proposition

Si p **est impair et** q **est impair**, le point $F(t_0)$ correspond à un point d'inflexion: La courbe traverse la tangente en ce point qui est dirigée par le vecteur u_p.

Si p **est impair et** q **est pair**, le point $F(t_0)$ correspond à un point de concavité: La courbe reste d'un même côté par rapport à sa tangente.

Si p **est pair et** q **est impair**, le point $F(t_0)$ correspond à un point de rebroussement de première espèce: La courbe va traverser sa tangente tout en restant d'un même côté par rapport à la droite dirigée par la vecteur u_q. On aura un point anguleux.

Si p **est pair et** q **est pair**, le point $F(t_0)$ correspond à un point de rebroussement de deuxième espèce: La courbe s'approche de $F(t_0)$ suivant le vecteur tangent u_p et rebrousse son chemin sans traverser la tangente ni la droite passant par $F(t_0)$ et dirigée par le vecteur u_q. On a un point anguleux.

Démonstration Il suffit de considérer le signe de $(t-t_0)^p$ et celui de $(t-t_0)^q$ lorsque t tend vers t_0^+ et lorsque t tend vers t_0^-.

Si p est impair et q est impair, pour t voisin de t_0, $F(t) - F(t_0)$ est un vecteur qui admet une composante positive suivant u_p et une composante positive également suivant u_q lorsque t tend vers t_0^+. Les signes de ces deux composantes changent et deviennent tous les deux négatifs lorsque t tend vers t_0^-. Si on reprend ces informations au niveau local au voisinage de $F(t_0)$, cela correspond exactement à un point d'inflexion.

Par contre, si p est impair et q est pair, le signe de la composante suivant le vecteur u_q ne change pas et reste positif indépendamment du fait qu'on ait $t > t_0$ ou $t < t_0$. Dans cas, la courbe ne traverse pas sa tangente. Les autres situations se traitent de la même manière.

L'espace ci-dessus est réservé pour des dessins qui seront faits lors de la séance de cours.

Point d'inflexion

Point de concavité

Point de rebroussement de 1ère espèce

Point de rebroussement de 2ème espèce

Pour finir le plan d'étude, il reste à étudier la concavité de la courbe.

5. Concavité

La concavité change en des points où la pente de la tangente passe par un minimum ou un maximum. Pour cela, on considère le rapport

$$\frac{y'(t)}{x'(t)}$$

ou le rapport

$$\frac{x'(t)}{y'(t)}$$

lorsqu'au moins un des deux est défini. Il faut noter que si le vecteur tangent est vertical, cela signifie que $x'(t_0) = 0$ et dans ce cas, on étudie le second rapport. Si le vecteur tangent est horizontal, on a $y'(t_0) = 0$ et dans ce cas on étudie le premier rapport au voisinage de t_0. Notons aussi que la concavité peut changer en un point stationnaire, c'est à dire tel que

$$x'(t_0) = y'(t_0) = 0.$$

Or, si le point est singulier, les fonctions $t \longmapsto x'(t)$ et $t \longmapsto y'(t)$ sont non nulles sur un voisinage convenable de t_0 privé de t_0. Il est donc légitime de se demander si le rapport change de signe. Dans tous les cas, une condition nécessaire est que

$$x'(t)y"(t) - x"(t)y'(t) = 0.$$

Parmi les solutions obtenues, on doit s'assurer si le signe change. L'étude de la concavité nécessite parfois beaucoup de calculs. Pour cette raison, on ne fera l'étude de la concavité que si cette dernière est demandée.

Les exercices suivants seront traités en cours.

Exercices Etudier les courbes paramétrées suivantes:

$$\begin{cases} x(t) = 3t - t^3 \\ y(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x(t) = 3cos(t) + cos(3t) \\ y(t) = 3sin(t) - sin(3t) \end{cases}.$$

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{t^2-4t} \\ y(t) = \frac{t^2-1}{t} \end{cases}.$$

Universite Mohammed V- Agdal
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Module Analyse 2

Filières SM et SMIA

Semestre 2

Chapitre 5

Hamza BOUJEMAA

Chapitre 5 Courbes en coordonnées polaires.

I. Introduction.

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à certaines courbes paramétrées particulières. Plus précisément celles qui se présentent sous la forme

$$\begin{cases} x(\theta) = \rho(\theta)cos(\theta) \\ y(\theta) = \rho(\theta)sin(\theta) \end{cases}$$

où ρ est une fonction définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}$ et supposée suffisamment différentiable.

Une courbe en coordonnées polaires est donnée par une relation de la forme

$$\rho = \rho(\theta).$$

Bien entendu, on peut faire l'étude de ce genre de courbes en utilisant les méthodes d'étude pour n'importe quelle courbe paramétrée, mais il est plus pratique d'appliquer une autre méthode à ce genre de situation. On verra par exemple que pour ce type de courbe, les points de rebroussement de deuxième espèce sont exclus.

Il est important de noter que la fonction ρ peut prendre des valeurs négatives. Dans ce cas, le point $(x(\theta), y(\theta))$ aura pour angle polaire non pas θ mais $\theta + \pi$ et la distance qui le sépare de l'origine est $-\rho(\theta)$.

Il est également pratique d'introduire les vecteurs

$$u_\theta = cos(\theta)\overrightarrow{i} + sin(\theta)\overrightarrow{j} \text{ et } v_\theta = -sin(\theta)\overrightarrow{i} + cos(\theta)\overrightarrow{j}.$$

Au lieu de dériver $x(\theta)$ et $y(\theta)$, on dérivera u_θ et v_θ et on a la formule suivante

$$\frac{d^n}{d\theta^n}(u_\theta) = cos(\theta + n\frac{\pi}{2})\overrightarrow{i} + sin(\theta + n\frac{\pi}{2})\overrightarrow{j}.$$

Dans la suite, on écrira

$$F(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = \rho(\theta)u_\theta.$$

Le paramètre θ remplacera le paramètre t. On notera que les vecteurs $u^{(p)}(\theta)$ et $u^{(p+1)}(\theta)$ sont orthogonaux pour tout $p \geq 0$ et que

$$F'(\theta) = \rho'(\theta)u_\theta + \rho(\theta)v_\theta.$$

La formule de Leibniz appliquée à la fonction F donne

$$F^{(n)}(\theta) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \rho^{(k)}(\theta) u^{(n-k)}(\theta).$$

II. Vecteur tangent en un point et point stationnaire.

Un point $F(\theta_0)$ est stationnaire lorsque

$$F'(\theta_0) = \rho'(\theta_0) u_{\theta_0} + \rho(\theta_0) v_{\theta_0} = (0,0).$$

Cela signifie

$$\rho(\theta_0) = 0 \text{ et } \rho'(\theta_0) = 0.$$

Ceci entraine la proposition suiante:

Proposition Si le point $F(\theta_0)$ n'est pas l'origine alors ce point n'est pas stationnaire et le vecteur $F'(\theta_0)$ est le vecteur tangent.

En effet, si le point considéré n'est pas l'origine alors $\rho(\theta_0) \neq 0$ et par suite le vecteur $F'(\theta_0)$ n'est pas le vecteur nul.

On a également la proposition suivante:

Proposition Si le point $F(\theta_0)$ est l'origine alors ou bien $\rho'(\theta_0) \neq 0$ et dans ce cas le point n'est pas stationnaire et $F'(\theta_0)$ est un vecteur tangent ou bien $\rho'(\theta_0) = 0$ et dans ce cas le point est stationnaire et si p est le plus petit entier supérieur à 1 tel que $\rho^{(p)}(\theta_0) \neq 0$, le vecteur

$$F^{(p)}(\theta_0) = \rho^{(p)}(\theta_0) u_{\theta_0}$$

est un vecteur tangent.

Démonstration Supposons $\rho'(\theta_0) = 0$. D 'après la formule de Leibniz, on a

$$F^{(p)}(\theta_0) = \sum_{k=0}^{p} C_p^k \rho^{(k)}(\theta_0) u^{(p-k)}(\theta_0).$$

Si p désigne le plus petit entier supérieur à 1 tel que $\rho^{(p)}(\theta_0) \neq 0$, la somme précédente se réduit au seul terme

$$\rho^{(p)}(\theta_0) u_{\theta_0},$$

et on a

$$F^{(p)}(\theta_0) = \rho^{(p)}(\theta_0) u_{\theta_0}.$$

Remarques

1. Si la courbe passe par l'origine pour la valeur θ_0 du paramètre, la tangente à la courbe fait avec l'axe (Ox) un angle θ_0.

2. En tout point autre que l'origine et pour lequel $\rho'(\theta_0) \neq 0$, la tangente à la courbe fait avec la demi droite $(OM(\theta_0))$ un angle α déterminé par

$$\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ et } tan(\alpha) = \frac{\rho(\theta_0)}{\rho'(\theta_0)}.$$

Si en un tel point $\rho'(\theta_0) = 0$, alors la tangente est dirigée par le vecteur v_{θ_0}.

Afin de compléter l'étude au voisinage de certains points, on va étudier la nature des points stationnaires ainsi que la nature des points autres que l'origine. On va déterminer les possibilités pour les points d'inflexion, de concavité et de rebroussement de première espèce. Les points de rebroussement de deuxième espèce sont exclus pour les courbes en coordonnées polaires.

III. Inflexion, concavité et rebroussement 1ère espèce.

1. Cas où $F(\theta_0) = 0$.

Dans ce cas, on a donc $\rho(\theta_0) = 0$. D'après le paragraphe précédent, nous savons que le vecteur tangent en un tel point est donné par le vecteur $F^{(p)}(\theta_0)$ où p est le plus petit entier supérieur ou égal à 1 tel que $F^{(p)}(\theta_0) \neq 0$. On a la proposition suivante:

Proposition Le vecteur $u_{p+1} = F^{(p+1)}(\theta_0)$ est non nul et non colinéaire au vecteur $u_p = F^{(p)}(\theta_0)$. L'ensemble $\{u_p, u_{p+1}\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration Il suffit de remarquer qu'on a

$$F^{(p)}(\theta_0) = \rho^{(p)}(\theta_0)u_{\theta_0} \text{ et } F^{(p+1)}(\theta_0) = \rho^{(p+1)}(\theta_0)u_{\theta_0} + \rho^{(p)}(\theta_0)v_{\theta_0},$$

et la conclusion découle du fait que $\{u_{\theta_0}, v_{\theta_0}\}$ est une base orthogonale.

Conséquence Si p est impair, l'origine est un point de concavité et si p est pair l'origine est un point de rebroussement de 1ère espèce.

Remarques (Les espaces qui suivent sont réservés aux dessins qui seront faits en cours)

1. Si p est impair et $\rho^{(p)}(\theta_0) > 0$, alors $\rho(\theta) < 0$ pour $\theta < \theta_0$ et $\rho(\theta) > 0$ pour $\theta > \theta_0$. Nous voyons qu'alors $\rho(\theta)$ prend des valeurs négatives lorsque θ est proche de θ_0 avec

$\theta < \theta_0$. Les coordonnées polaires du point $(x(\theta), y(\theta))$ sont $(-\rho(\theta), \theta + \pi)$. Dans ce cas, au voisinage de 0, la courbe se présente comme suit:

2. Si p est impair et $\rho^{(p)}(\theta_0) < 0$, alors $\rho(\theta) > 0$ pour $\theta < \theta_0$ et $\rho(\theta) < 0$ pour $\theta > \theta_0$. Nous voyons qu'alors $\rho(\theta)$ prend des valeurs négatives lorsque θ est proche de θ_0 avec $\theta > \theta_0$. Les coordonnées polaires du point $(x(\theta), y(\theta))$ sont $(-\rho(\theta), \theta + \pi)$. Dans ce cas, au voisinage de 0, la courbe se présente comme suit:

3. Si p est pair et $\rho^{(p)}(\theta_0) > 0$, alors $\rho(\theta) > 0$ pour $\theta < \theta_0$ et $\rho(\theta) > 0$ pour $\theta > \theta_0$. Dans ce cas, au voisinage de 0, la courbe se présente comme suit:

4. Si p est pair et $\rho^{(p)}(\theta_0) < 0$, alors $\rho(\theta) < 0$ pour $\theta < \theta_0$ et $\rho(\theta) < 0$ pour $\theta > \theta_0$. Nous voyons qu'alors $\rho(\theta)$ prend des valeurs négatives lorsque θ est proche de θ_0 selon que $\theta > \theta_0$ ou que $\theta < \theta_0$. Les coordonnées polaires du point $(x(\theta), y(\theta))$ sont $(-\rho(\theta), \theta + \pi)$. Dans ce cas, au voisinage de 0, la courbe se présente comme suit:

2. Cas où $F(\theta_0) \neq 0$.

Dans ce cas, on a donc $\rho(\theta_0) \neq 0$. D'après le paragraphe précédent, nous savons que le vecteur tangent en un tel point est donné par le vecteur $F^{'}(\theta_0) = \rho'(\theta_0)u_{\theta_0} + \rho(\theta_0)v_{\theta_0}$. Il se peut que le vecteur

$$F^{(2)}(\theta_0) = (\rho"(\theta_0) - \rho(\theta_0))u_{\theta_0} + 2\rho'(\theta_0)v_{\theta_0}$$

soit colinéaire à u_{θ_0}. Soit donc q le plus petit entier supérieur à 1 tel que $F^{(q)}(\theta_0)$ soit non colinéaire à $F'(\theta_0)$. On a la proposition suivante:

Proposition Si q est impair, le point $F(\theta_0)$ est un point d'inflexion et si q est pair le point $F(\theta_0)$ est un point de concavité.

Remarques

1. Le point $F(\theta_0)$ n'est jamais un point de rebroussement.

2. Si $\rho'(\theta_0) = 0$, le vecteur tangent $F'(\theta_0)$ est parallèle au vecteur v_{θ_0}. Dans le cas $\rho'(\theta_0) \neq 0$, le vecteur tangent $F'(\theta_0)$ n'est plus parallèle au vecteur v_{θ_0} et lorsque $\theta > \theta_0$, $\rho(\theta) > \rho(\theta_0)$ ou $\rho(\theta) < \rho(\theta_0)$ selon que $\rho'(\theta_0) > 0$ ou $\rho'(\theta_0) < 0$.

3. Dans le cas où $\rho'(\theta_0) = 0$ et pour comprendre le comportement de la courbe au voisinage du point $F(\theta_0)$, on a besoin de considérer le plus petit entier k tel que $\rho^{(k)}(\theta_0) \neq 0$. De toutes les façons, nous aurons un point d'inflexion si q est impair et un point de concavité si q est pair.

IV. Symétries et concavité.

1. Symétries

1. S'il existe $\alpha \in I\!R$ tel que pour tout θ appartenant au domaine de définition de ρ D_ρ,

$$(\theta + \alpha) \in D_\rho \text{ et } \rho(\theta + \alpha) = \rho(\theta)$$

ou bien

$$(\theta + \alpha + \pi) \in D_\rho \text{ et } \rho(\theta + \alpha + \pi) = -\rho(\theta)$$

alors la courbe est invariante par la rotation de centre O et d'angle α. En pratique, cela revient à étudier si la fonction ρ est périodique.

2. S'il existe $\alpha \in I\!R$ tel que pour tout $\theta \in D_\rho$

$$(\alpha - \theta) \in D_\rho \text{ et } \rho(\alpha - \theta) = \rho(\theta) \qquad (*)$$

ou bien

$$(\alpha + \pi - \theta) \in D_\rho \text{ et } \rho(\alpha + \pi - \theta) = -\rho(\theta) \qquad (**)$$

alors la courbe est invariante par symétrie par rapport à la droite Δ passant par O et faisant avec (Ox) un angle égal à $(\alpha/2)$ modulo π.

Cas particuliers.

- Si $\alpha = 0$ dans (*), c'est à dire si ρ est paire, la courbe est symétrique par rapport à l'axe (Ox).

- Si $\alpha = \pi$ dans (*), la courbe est symétrique par rapport à l'axe (Oy).

- Si $\alpha = -\pi$ dans (**), la fonction ρ est impaire, la courbe est symétrique par rapport à l'axe (Oy).

2. Concavité

On cherche les points d'inflexion éventuels. D'après l'étude des vecteurs tangents, nous savons que l'origine ne peut pas être un point d'inflexion.

Une condition nécessaire pour avoir un point d'inflexion en un point $F(\theta_0)$ est que les vecteurs $F'(\theta_0) = (\rho'(\theta_0), \rho(\theta_0))$ et $F"(\theta_0) = (\rho"(\theta_0) - \rho(\theta_0), 2\rho'(\theta_0))$ soient colinéaires, autrement écrit:

$$\rho^2(\theta_0) + 2\rho'^2(\theta_0) - \rho(\theta_0)\rho"(\theta_0) = 0.$$

Comme $\rho(\theta_0) \neq 0$, ceci équivaut à la formule plus facile à retenir

$$\frac{1}{\rho(\theta_0)} + (\frac{1}{\rho(\theta_0)})" = 0.$$

Une fois la ou les valeurs de θ_0 trouvée(s), on doit s'assurer si on a bien un point d'inflexion en vérifiant que les vecteurs $F'(\theta_0)$ et $F^{(3)}(\theta_0)$ sont indépendants.

V. Branches infinies et asymptotes.

On a des branches infinies lorsque $||F(\theta)||$ tend vers $+\infty$ lorsque θ tend vers θ_0. C'est à dire $|\rho(\theta)|$ tend vers $+\infty$ lorsque θ tend vers θ_0.

Nous allons préciser le cas où on a une asymptote oblique (Δ) parallèle à la droite (D) passant par O, faisant avec l'axe (Ox) un angle égal à $\theta_0 \in \mathbb{R}$ et se trouvant à une distance b de la droite (D).

La courbe admet la droite Δ comme asymptote oblique lorsque θ tend vers θ_0 si et seulement si

$$\lim_{\theta \to \theta_0} \rho(\theta) sin(\theta - \theta_0) = b.$$

Pour établir cette relation, il faut noter que si M est le point $F(\theta)$ et si H désigne son projeté orthogonal sur la droite (D) alors la distance MH est donnée par

$$MH = |\rho(\theta).sin(\theta - \theta_0)|.$$

Dire que la courbe admet la droite Δ comme asymptote c'est dire que la distance MH tend vers la limite finie b. Il faut noter que Δ peut se trouver au dessus ou en dessous de (D) selon que θ tend vers θ_0^+ ou θ_0^-.

Autres types de branches infinies

On peut aussi avoir des branches infinies en spirale si $\rho(\theta)$ tend vers $+\infty$ ou $r \geq 0 \in I\!R$ lorsque θ tend $+\infty$ ou $-\infty$.

Si $r = 0$, l'origine est un point asymptote et la courbe s'enroule autour de l'origine dans le sens des aiguilles d'une montre ou dans le sens inverse selon que θ tend vers $-\infty$ ou $+\infty$.

Si $r > 0$, le cercle de centre O et de rayon $r > 0$ est dans ce cas un cercle asymptote et la courbe s'enroule autour de ce cercle dans le sens des aiguilles d'une montre ou le sens inverse selon que θ tend vers $-\infty$ ou θ tend vers $+\infty$.

De plus, si $\rho(\theta)$ tend vers r^- lorsque θ tend vers $+\infty$, la courbe s'enroule autour du cercle dans le sens trigonométrique tout en étant à l'intérieur du cercle, et si $\rho(\theta)$ tend vers r^- lorsque θ tend vers $-\infty$ par , la courbe s'enroule autour du cercle dans le sens inverse du sens trigonométrique tout en étant à l'intérieur du cercle.

Maintenant, si $\rho(\theta)$ tend vers r^+ lorsque θ tend vers $+\infty$, la courbe s'enroule autour du cercle dans le sens trigonométrique tout en étant à l'extérieur du cercle, et si $\rho(\theta)$ tend vers r^+ lorsque θ tend vers $-\infty$ par , la courbe s'enroule autour du cercle dans le sens inverse du sens trigonométrique tout en étant à l'extérieur du cercle.

Exemple

$$\rho(\theta) = \frac{\theta - 1}{\theta + 1}.$$

Nous voyons dans ce cas que lorsque θ tend vers $+\infty$, $\rho(\theta)$ tend vers 1^-, la courbe présente donc un cercle asymptote et la courbe s'enroule autour de ce cercle de l'intérieur et dans le sens trigonométrique.

Nous voyons également que lorsque θ tend vers $-\infty$, $\rho(\theta)$ tend vers 1^+, la courbe présente donc un cercle asymptote et la courbe s'enroule autour de ce cercle de l'extérieur et dans le sens trigonométrique.

V. Exemples de courbes en coordonnées polaires.

Les exemples suivants seront traités en cours

$$\rho(\theta) = 1 - \theta^2 \qquad \text{Spirale de Galilée.}$$

$$\rho(\theta) = 2cos(\theta) + 1 \qquad \text{Limaçon de Pascal.}$$

$$\rho(\theta) = \frac{\theta - 1}{\theta + 1}.$$